Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Red Universitaria e Institución Benemérita de Jalisco
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Educación Matemática *vol. 35 • núm. 2• agosto de 2023*

Editor responsable: Ernesto A. Sánchez Sánchez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 1 de agosto de 2023.

https://www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

Editorial 5

Ernesto Sánchez, José Luis López

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Temas futuros de la investigación en educación matemática: una encuesta internacional antes y durante la pandemia 9

Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic

Arthur Bakker, Jinfa Cai, Linda Zenger

El papel de los juicios de valor en la ciencia didáctica. Diálogo entre la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque ontosemiótico en educación matemática 47

The role of value judgements in didactics. Dialogue between the Anthropological Theory of Didactic and the Ontosemiotic Approach in mathematics education

Josep Gascón, Pedro Nicolás

Capacidad de enseñanza de la magnitud masa y reflexión en la formación inicial docente: el caso de una maestra de infantil 69

Teaching capacity for the weight notion and teacher reflection of prospective educators: the case of an early childhood teacher

Pamela Reyes Santander, Tatiana Goldrine Godoy, Raimundo Olfos Ayarza

Elaboración de un instrumento para identificar prácticas pedagógicas en la enseñanza de la multiplicación 95

Development of a tool to identify pedagogical practices in teaching multiplication

Ximena Oyarzo Velásquez, Sandra Burgos Henríquez, Montserrat Prat

La complejidad de las tareas auténticas estimadas desde el contexto real del desarrollo docente 116

The complexity of authentic tasks estimated from the real context of the teacher development

Miriam Deysi Bautista Lopez, Fiorella Casallo Chanco, Gabriela Mercedes Ruiz Quispe, Fabiola Talavera-Mendoza

Acuerdos institucionales, trayectorias de aprendizaje y recorridos de enseñanza. Discusiones en un grupo de trabajo colaborativo entre maestros e investigadores en didáctica de la matemática 145
Institutional agreements, learning trajectories, and teaching journeys. Discussions within a collaborative work group between teachers and researchers in mathematics education
María Mónica Becerril, Patricia García, María Paula Pérez, María Emilia Quaranta, Patricia Sadovsky

Modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ en docentes que enseñan álgebra en los primeros años escolares 170
Modes of thinking the set $\mathbb{Z}_4$ in teachers who teach algebra in the first years of school
Pedro Vidal-Szabó, Marcela Parraguez, Daniela Bonilla, Samuel Campos

Relaciones entre el aprendizaje de la estadística y las actitudes del alumnado en el marco de un proyecto de análisis de datos con tecnología 196
Relationships between statistical performance and student attitudes in the framework of a data analytics project with technology
Andreea Cujba, Manoli Pifarré

ENSAYO

La relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK: una oportunidad de investigación 226
The relationship between the Affective Domain and the MTSK model: an opportunity for research
Salvador Soto-Cerros, María del Socorro García-González,María Isabel Pascual-Martín

CONTRIBUCIONES A LA DOCENCIA

Intervenção Colaborativa nas Aulas de Matemática: O processo de ensino e aprendizagem de um aluno com autismo 247
Collaborative Intervention in Mathematics Classes: The teaching and learning process of a student with autism
Erica Daiane Ferreira Camargo, Rosana Carla do Nascimento Givigi

Los recursos lúdicos para la mejora de la actitud del alumnado de Educación Primaria hacia el aprendizaje de la geometría 268
Playful resources to improve the attitude of Primary Education students towards learning geometry
Inés Álvarez-Rey, Laura Muñiz-Rodríguez

https://doi.org/10.24844/EM3502.00

Editorial

Ernesto Sánchez[1]
José Luis López[2]

En este segundo número del año continuamos celebrando el 35 aniversario de la revista *Educación Matemática* (rEM). Como parte de la celebración esta vez hemos incluido un artículo invitado escrito por Arthur Bakker, Jinfa Cai, y Linda Zenger publicado en la revista *Educational Studies in Mathematics* (ESM) en el año 2021. En un periodo reciente, Bakker y Cai fueron los jefes editoriales de ESM y *Journal for Research in Mathematics Education* (JRME) respectivamente. Ellos preguntaron a la comunidad internacional de investigadores en el área por los temas de educación matemática que deberían atenderse en los próximos 10 años. La pregunta la hicieron antes y después de la pandemia de COVID-19 y contrastaron el efecto que esta produjo en las opiniones de los investigadores que respondieron. El lector se podrá enterar de los resultados y otros detalles leyendo el artículo que en este número se reproduce. Queremos llamar la atención sobre las ocho categorías que los autores propusieron para clasificar la información recogida y el porcentaje con el que se presentaron en su primera aplicación:

1. Enfoques de la enseñanza, 64%
2. Objetivos de la educación matemática, 54%
3. Relación de la educación matemática con otras prácticas, 36%
4. Desarrollo profesional del profesor, 23%
5. Tecnología, 22%
6. Equidad, diversidad e inclusión, 20%
7. Afecto, 17%
8. Evaluación, 9%

Esta lista nos sugiere la pregunta: ¿De qué manera se distribuyen los artículos publicados recientemente en la rEM entre las mismas categorías? Hicimos el ejercicio de explorar los artículos publicados en los últimos cinco años en rEM

[1] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, esanchez@cinvestav.mx, https://orcid.org/0000-0002-8995-7962.
[2] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, joseluis.lopez@cinvestav.mx, https://orcid.org/0000-0003-0110-8956.

y asignarlos a alguna de las categorías de Bakker *et al.* Conviene observar que cada categoría cubre más especímenes que los que sugiere estrictamente su nombre, por ejemplo, en la categoría 1 se incluyen los estudios de aprendizaje y más; en la categoría 2 algunos trabajos teóricos o reflexiones sobre la educación matemática como disciplina; la categoría 4, incluye estudios sobre formación inicial de profesores, creencias de maestros, etc. y; en la categoría 8 de evaluación se incluyen los análisis del currículo y estudios sobre libros de texto. Por otro lado, cada espécimen puede caber en más de una categoría, por ejemplo, un estudio de maestros que ponen en práctica un enfoque de enseñanza con tecnología. A pesar de las dificultades decidimos revisar los artículos publicados en rEM en los últimos cinco años; contamos 159 artículos. Tomamos algunas decisiones pragmáticas, por ejemplo, asignar cada artículo solo a una categoría, para obtener una visión panorámica de su distribución en la rEM, obteniendo la lista, ordenada respecto al porcentaje, que se presenta abajo:

1. Enfoques de enseñanza, 56%
2. Desarrollo profesional de profesores, 20%
3. Evaluación, 9.4%
4. Objetivos de la educación matemática, 5%
5. Tecnología, 5%
6. Equidad, diversidad e inclusión, 1.2%
7. Afecto, 0.6%
8. Relación de la educación matemática con otras prácticas, 0.6%

Es interesante observar que el orden de las categorías de acuerdo con el porcentaje se mantiene en lo general, con excepción de lo siguiente: la categoría 2 original "objetivos de la educación matemática" pasa al lugar cuatro y permuta con la categoría 4 "desarrollo profesional del profesor". También la categoría 3, "relación de la educación matemática con otras prácticas" pasa a la posición 8 y permuta con la categoría 8 "evaluación".

A reserva de profundizar en el futuro sobre algunos aspectos de esta comparación, unas conclusiones provisionales son que la rEM cubre de manera general los temas que en opinión de los expertos internacionales deben investigarse en Educación Matemática. No obstante, son escasos los estudios publicados sobre tecnología y sobre teorías y objetivos de la Educación Matemática. Apenas se han tenido contribuciones en temas emergentes como equidad, diversidad y género. Por último, han estado prácticamente ausentes estudios sobre afecto y sobre la relación de la educación matemática con otras prácticas.

El comportamiento y la cantidad de citas en la Web of Science (WoS) ofrecen una perspectiva adicional sobre el interés que la comunidad académica muestra hacia nuestra revista. Los datos actualizados hasta el momento registran al menos 1,689 citas provenientes de 1,192 artículos, libros o memorias registrados en la base de datos WoS, abarcando un conjunto de 472 artículos de investigación, reseñas, ensayos o contribuciones a la docencia publicados a lo largo de la historia de la rEM.

Al organizar los artículos, libros o memorias que citan a nuestra revista en WoS por fecha de publicación, se evidencia un creciente interés en nuestros contenidos.

Publicados entre	Documentos registrados en WoS que citan a la rEM
2002 a 2006	22
2007 a 2010	90
2011 a 2014	136
2015 a 2018	294
2019 a 2022	598

En lo que va de 2023 existen 51 documentos registrados en WoS que citan contenidos de la revista. Con uno más a publicarse el próximo año suman 1,192 originales. Evidenciando que los contenidos de la revista son de actual interés.

Al ordenar estos contenidos por fecha de publicación, se observa un aumento progresivo en la cantidad de citas que reciben.

Publicados entre	Citas que reciben
1990 a 1997	146
1998 a 2005	447
2006 a 2013	549
2014 a 2022	544

En el transcurso de 2023, es decir artículos del número anterior o en prensa, han recibido ya tres citas. El número de citas a los artículos publicados en el último periodo de tiempo es similar al de periodos anteriores, que han tenido una mayor exposición a lo largo del tiempo. Se prevé que en los próximos años continúen acumulando más citas y que la tendencia ascendente se mantenga.

Los datos presentados confirman un creciente interés de la comunidad académica en los contenidos de la rEM. Además, es destacable que los contenidos más recientes reciben una atención particularmente alta. El mismo comportamiento se presenta con el corpus de citas compuesto por todas las colecciones de la Red SciELO, como se puede observar en la figura 1.

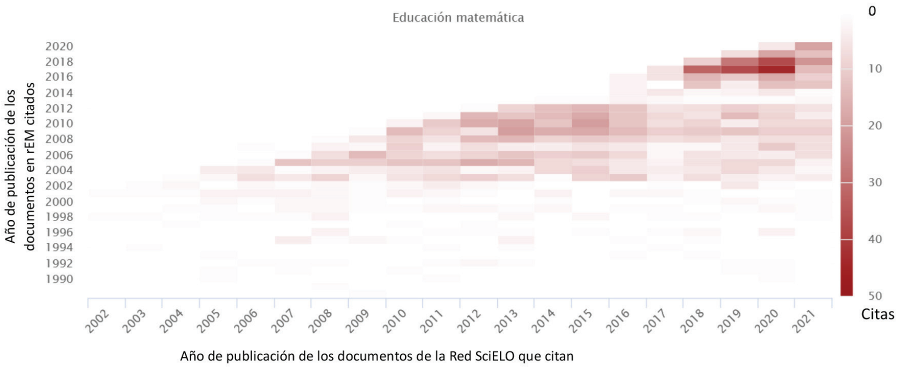


Figura 1. Mapa de calor para citas recibidas en la revista *Educación Matemática* adaptado de SciELO Analytics, licencia CC Atribución 4.0 internacional.

Estos hallazgos enfatizan la relevancia y calidad de las investigaciones presentadas en la revista *Educación Matemática*.

En este número se presenta el artículo invitado ya mencionado, siete artículos de investigación, un ensayo y dos contribuciones a la docencia. Los artículos abordan diversos temas, niveles y ubicaciones, lo que permite al lector encontrar al menos uno que se ajuste a sus intereses. El ensayo nos invita a reflexionar sobre la valiosa oportunidad de investigación que representa la relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) y sus varias implicaciones importantes. En una de las contribuciones a la docencia, se aborda la educación inclusiva desde la intervención colaborativa para ayudar a niños con autismo a progresar en su aprendizaje de conceptos científicos de las matemáticas. La otra contribución presenta una intervención didáctica utilizando recursos lúdicos, lo que parece aumentar tanto la motivación como el interés del alumnado hacia el aprendizaje de la geometría.

 https://doi.org/10.24844/EM3502.01

Temas futuros de la investigación en educación matemática: una encuesta internacional antes y durante la pandemia[1]

Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic

Arthur Bakker,[2] Jinfa Cai,[3] Linda Zenger[4]

Resumen: Antes de la pandemia (2019), nos preguntamos: ¿En qué temas debería centrarse la investigación en educación matemática en la próxima década? Las 229 respuestas de 44 países condujeron a ocho temas más consideraciones sobre la investigación en educación matemática en sí. Los temas se pueden resumir como enfoques de enseñanza, objetivos, relaciones con prácticas fuera de la educación matemática, desarrollo profesional docente, tecnología, afecto, equidad y evaluación. Durante la pandemia (noviembre de 2020), preguntamos a los encuestados: ¿Ha cambiado la pandemia su opinión sobre los temas de la investigación en educación matemática para la próxima década? Si es así, ¿cómo? Varios de los 108 encuestados vieron reforzada la importancia de sus temas originales (45), especificaron sus respuestas iniciales (43) y/o agregaron temas (35) (estas categorías no eran mutuamente excluyentes). En general, parecían estar de acuerdo en que la pandemia funciona como una lupa en temas que ya se conocían, y varios encuestados señalaron la necesidad de pensar en el futuro sobre cómo organizar la educación

[1] Este artículo ha sido publicado en inglés en: Bakker, A., Cai J., y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics 107*(1), 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

[2] Utrecht University, Utrecht, Netherlands, A.Bakker4@uu.nl, orcid.org/0000-0002-9604-3448.

[3] University of Delaware, Newark, DE, USA, orcid.org/0000-0002-0501-3826

[4] Utrecht University, Utrecht, Netherlands

cuando ya no fuera necesario hacerlo en línea. Terminamos con una lista de desafíos de investigación que se basan en los temas y las reflexiones de los encuestados sobre la investigación en educación matemática.

Palabras clave *COVID-19 . Grandes desafíos. Pandemia. Investigación en educación matemática,. Agenda de investigación*

1. UNA ENCUESTA INTERNACIONAL EN DOS RONDAS

Alrededor del momento en que Educational Studies in Mathematics (ESM) y el Journal for Research in Mathematics Education (JRME) celebraban sus 50 aniversarios, Arthur Bakker (editor de ESM) y Jinfa Cai (editor de JRME) vieron la necesidad de plantear la siguiente pregunta, orientada al futuro, para el campo de la investigación en educación matemática:

> P2019: ¿En qué temas debería centrarse la investigación en educación matemática en la próxima década?

Con ese fin, administramos una encuesta con solo esta pregunta entre el 17 de junio y el 16 de octubre de 2019.

Cuando estábamos casi listos con el análisis, estalló la pandemia de COVID-19 y no pudimos presentar los resultados en las conferencias a las que habíamos planeado asistir (NCTM e ICME en 2020). Además, con el mundo sacudido por la crisis, nos preguntamos si los colegas en nuestro campo podrían pensar de manera diferente sobre los temas formulados para el futuro debido a la pandemia. Por lo tanto, el 26 de noviembre de 2020, hicimos una pregunta de seguimiento a aquellos encuestados que en 2019 nos habían dado permiso para acercarnos a ellos vía correo electrónico:

> P2020: ¿Ha cambiado la pandemia su visión sobre los temas de investigación en educación matemática para la próxima década? Si es así, ¿cómo?

En este documento, resumimos las respuestas a estas dos preguntas. Similar al enfoque de Sfard (2005), comenzamos sintetizando las voces de los encuestados antes de formular nuestros propios puntos de vista. Algunos colegas plantearon la idea de formular una lista de temas o preguntas clave, similar a los 23 problemas matemáticos no resueltos que David Hilbert publicó alrededor de 1900 (cf. Schoenfeld, 1999). Sin embargo, las matemáticas y la educación matemática son disciplinas muy diferentes, y muy pocas personas comparten la visión formalista de Hilbert sobre las matemáticas; por lo tanto, no queremos sugerir que podríamos capturar los temas clave de la educación matemática de una manera similar. Más bien, nuestra visión general de los temas extraídos de las respuestas de la encuesta tiene la intención de resumir lo que se valora en nuestra comunidad global en el momento de las encuestas. Razonando a partir de estos temas, terminamos con una lista de desafíos de investigación que consideramos que vale la pena abordar en el futuro (cf. Stephan *et al.*, 2015).

2. ENFOQUE METODOLÓGICO

2.1 Temas para la próxima década (2019)

Administramos la encuesta de 1 pregunta a través de listas de correo electrónico que conocíamos (por ejemplo, Becker, ICME, PME) y pedimos a los investigadores de educación matemática que la difundieran en sus redes nacionales. Al 16 de octubre de 2019, habíamos recibido 229 respuestas de 44 países de 6 continentes (tabla 1). Aunque estábamos contentos con la magnitud de la respuesta recibida, mayor a la que recibió Sfard (2005) (74, con 28 de Europa), no sabemos qué tan bien hemos llegado a regiones particulares y, si los encuestados potenciales podrían haber enfrentado barreras lingüísticas u otras. Ofrecimos a algunos encuestados chinos la opción de escribir en chino porque el segundo autor se ofreció a traducir sus correos electrónicos al inglés. También recibimos respuestas en español, que fueron traducidas para nosotros.

La aprobación ética fue dada por el Consejo de Revisión Ética de las Facultades de Ciencias y Geociencias de la Universidad de Utrecht (Bèta L-19247). Pedimos a los encuestados que indicaran si estaban dispuestos a ser citados por su nombre y si se nos permitía acercarnos a ellos para obtener información posterior. Si prefirieron ser nombrados, mencionamos su nombre y país; de lo contrario, escribimos “anónimo”. En nuestra selección de citas, nos hemos centrado en el contenido, no en el origen de la respuesta. El 2 de marzo de 2021, nos acercamos a los encuestados que fueron citados para verificar si aceptaban ser citados y nombrados. Un colega prefirió que se suprimiera la cita y el nombre; tres sugirieron pequeños cambios en la redacción; los demás aprobaron.

Tabla 1. Número de respuestas por continente (2019)

Continente (# de países)	Países (# de respuestas)	# de respuestas
Asia (12)	China (39), Israel (14), India (9), Japón (4), Indonesia (3), Rusia (3), Irán (2), Taiwán (2), Estados Árabes Unidos Emiratos (2), Bután (1), Filipinas (1), Turquía (1)	81
Europa (15)	Reino Unido (17,5), Alemania (10), Países Bajos (10), España (9), Italia (7), Austria (3), Suecia (3), Francia (2), Hungría (2), Irlanda (2), República Checa (1), Dinamarca (1), Islandia (1), Noruega (1), Eslovenia (1)	70.5
América del Norte (3)	Estados Unidos (22,5); Canadá (6); México (1)	29.5
África (10)	Kenya (8), Sudáfrica (8), Namibia (4), Argelia (1), Egipto (1), Esuatini (1), Ghana (1), Marruecos (1), Nigeria (1), Uganda (1)	27
Oceanía (2)	Australia (7); Nueva Zelanda (4)	11
América del Sur (2)	Brasil (5); Chile (5)	10
Totales: 6	44	229

Nota: Cuando un encuestado llenó dos países en dos continentes, atribuimos la mitad a uno y la otra mitad al otro continente.

El 20 de septiembre de 2019, los tres autores nos reunimos físicamente en la Universidad de Utrecht para analizar las respuestas. Después de cada propuesta individual, establecimos una lista conjunta de siete temas principales (los primeros siete en la tabla 2), que no eran ni mutuamente excluyentes ni exhaustivos. Zenger, entonces todavía estudiante de ciencias de la educación, codificó por colores todas las partes de las respuestas pertenecientes a una categoría. Estos formaron la base para las frecuencias y porcentajes presentados en las tablas y el texto. Luego, Bakker, leyó todas las respuestas categorizadas por un código particular para identificar y sintetizar los temas principales abordados dentro de cada código. Cai, leyó todas las respuestas de la encuesta y las categorías de respuesta, y las comentó. Después de la ronda inicial de análisis, nos dimos cuenta que era útil agregar un octavo tema: evaluación.

Además, dado que un gran número de encuestados hizo comentarios sobre la investigación en educación matemática en sí, decidimos resumirlos por separado. Para analizar esta categoría de investigación, utilizamos las siguientes cuatro etiquetas para distinguir los tipos de comentarios sobre nuestra disciplina de investigación en educación matemática: teoría, metodología, autorreflexión (incluidas las consideraciones éticas), interdisciplinariedad y transdisciplinariedad. Luego resumimos las respuestas por tipo de comentario.

Tabla 2. Porcentajes de respuestas mencionadas en cada tema (2019)

	Tema	%
1	Enfoques de la enseñanza	64
2	Objetivos de la educación matemática	54
3	Relación de la educación matemática con otras prácticas	36
4	Desarrollo profesional de profesorado	23
5	Tecnología	22
6	Equidad, diversidad, inclusión	20
7	Afecto	17
8	Evaluación	9

Nota. Los porcentajes no suman 100, porque muchos encuestados mencionaron múltiples temas

Ha sido una experiencia abrumadora y aleccionadora estudiar la enorme cobertura y diversidad de temas que preocupan a nuestros colegas. Cualquier categorización se sintió como una reducción de la riqueza de ideas, y somos conscientes de los riesgos de "resolver las cosas" (Bowker y Star, 2000), que vienen con desafíos particulares en primer plano en lugar de otros (Stephan *et al*., 2015). Sin embargo, la mejor manera de resumir el panorama general parecía agrupar temas y señalar sus relaciones. A medida que identificamos estos ocho temas de investigación en educación matemática para el futuro, una pregunta recurrente durante el análisis fue cómo representarlos. Una lista como la tabla 2 no hace justicia a las interrelaciones entre los temas. Algunas relaciones son muy claras, por ejemplo, los enfoques educativos (tema 2) que trabajan hacia objetivos educativos o sociales (tema 1). Algunos temas son omnipresentes; por ejemplo, la equidad y el afecto (positivo) son cosas que los educadores quieren lograr, pero también son fenómenos que están en juego durante cada momento de aprendizaje y enseñanza. Los diagramas que consideramos que representaban tales interrelaciones eran demasiado específicos (limitando las opciones relevantes, por ejemplo, una estrella con ocho vértices que solo vinculan pares de temas) o no lo suficientemente específicos (por ejemplo, un diagrama de Venn con ocho hojas, como el símbolo del iPhone para fotos). Al final, decidimos usar una imagen y colaboramos con Elisabeth Angerer (asistente estudiantil en un programa de ciencias de la educación), quien finalmente hizo el dibujo en la figura 1 para capturar temas en sus relaciones.

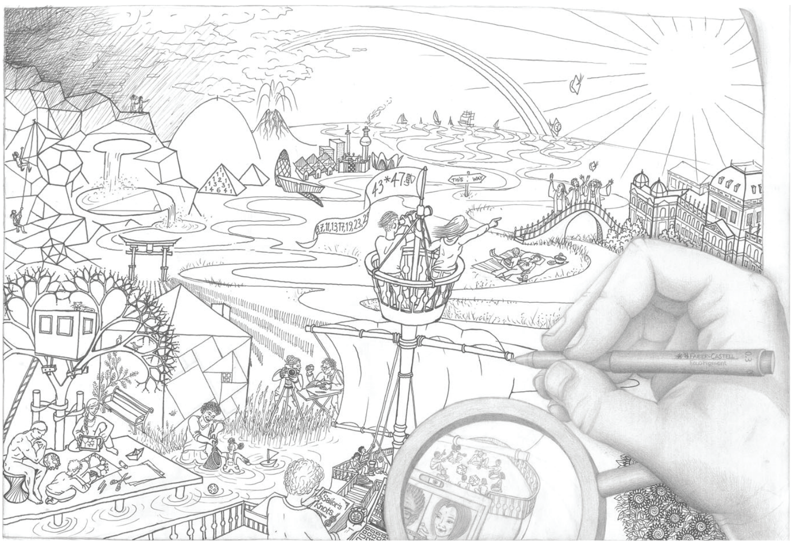


Figura. 1. Impresión artística de los temas futuros.

2.2 ¿Ha cambiado la pandemia su punto de vista? (2020)

El 26 de noviembre de 2020, enviamos un correo electrónico a los colegas que respondieron a la pregunta inicial y que dieron permiso para ser contactados por correo electrónico. Citamos su respuesta inicial y preguntamos: "¿Ha cambiado la pandemia su visión sobre los temas de la investigación en educación matemática para la próxima década? Si es así, ¿cómo?" Recibimos 108 respuestas hasta el 12 de enero de 2021. Los países de donde provinieron las respuestas incluyeron

China, Italia y otros lugares que fueron afectados temprano por el virus COVID-19. La longitud de las respuestas varió desde una sola palabra ("no") hasta textos elaborados de hasta 2,215 palabras. Algunas personas adjuntaron publicaciones relevantes. La mediana de longitud de las respuestas fue de 87 palabras, con una longitud media de 148 palabras y DE = 242. Zenger y Bakker los clasificaron como: "sin cambios" (9 respuestas) o "puntos de vista claramente diferentes" (8); el resto de las respuestas vieron reforzada la importancia de sus temas iniciales (45), especificaron sus respuestas iniciales (43) o agregaron nuevas preguntas o temas (35). Estas últimas categorías no eran mutuamente excluyentes, porque los encuestados podían declarar primero que pensaban que los temas iniciales eran aún más relevantes que antes y proporcionar temas adicionales más específicos. Luego utilizamos los mismos temas que se habían identificado en la primera ronda e identificamos lo que se enfatizó o agregó en las respuestas de 2020.

3. LOS TEMAS

El tema mencionado con mayor frecuencia fue lo que denominamos enfoques de la enseñanza (64% de los encuestados, ver tabla 2). El siguiente, fue el tema de los objetivos de la educación matemática sobre los cuales la investigación debería arrojar más luz en la próxima década (54%). Estos objetivos iban desde educativos específicos hasta sociales muy amplios. Muchos colegas se refirieron a las relaciones de la educación matemática con otras prácticas (comunidades, instituciones...) como el hogar, la educación continua y el trabajo. El desarrollo profesional docente es un área clave para la investigación en la que vuelven los otros temas (¿qué deben aprender los estudiantes?, ¿cómo?, ¿cómo evaluarlo?, ¿cómo usar la tecnología y asegurarse de que los estudiantes estén interesados?). La tecnología constituye su propio tema, pero también juega un papel clave en muchos otros temas, al igual que el afecto. Otro tema que impregna otros es lo que se puede resumir como equidad, diversidad e inclusión (también se mencionaron la justicia social, el antirracismo, los valores democráticos y varios otros valores). Estos valores no son solo objetivos sociales y educativos, sino también impulsores para rediseñar los enfoques de enseñanza, usar la tecnología, trabajar en una evaluación más justa y ayudar a los estudiantes a obtener acceso, confianza, desarrollar interés o incluso amor por las matemáticas. Para evaluar si los enfoques son exitosos y si se han logrado los objetivos, la evaluación (incluida la acreditacioón) también se menciona como un tema clave de la investigación.

En las respuestas de 2020, se hicieron observaciones sabias y generales. La esencia general es que la pandemia (como crisis anteriores, por ejemplo, la económica alrededor de 2008-2010) funcionó como una lupa en temas que ya se consideraban importantes. Sin embargo, debido a la pandemia, se dijo que los problemas sociales y educativos sistémicos se habían vuelto más visibles para una comunidad más amplia, y nos instan a pensar en el potencial de una "nueva normalidad".

3.1 Enfoques de la enseñanza

Distinguimos estrategias de enseñanza específicas de temas curriculares más amplios.

3.1.1 Estrategias de enseñanza

Existe una necesidad ampliamente reconocida de seguir diseñando y evaluando diversos enfoques de enseñanza. Entre las estrategias de enseñanza y los tipos de aprendizaje para promover que se mencionaron en las respuestas de la encuesta se encuentran el aprendizaje colaborativo, la educación matemática crítica, la enseñanza dialógica, la modelación, el aprendizaje personalizado, el aprendizaje basado en problemas, los temas transversales que abordan los más importantes del mundo, el diseño incorporado, la visualización y el aprendizaje intercalado. Sin embargo, tomemos en cuenta que los estudiantes también pueden mejorar sus conocimientos matemáticos independientemente de los maestros o padres a través de tutoriales web y videos de YouTube.

Algunos encuestados enfatizaron que los enfoques de enseñanza deberían hacer más que promover el desarrollo cognitivo. ¿Cómo puede la enseñanza ser entretenida o atractiva? ¿Cómo puede contribuir a los objetivos educativos más amplios de desarrollar la identidad de los estudiantes, contribuir a su empoderamiento y ayudarlos a ver el valor de las matemáticas en su vida cotidiana y trabajo? Consideraremos el afecto en la Sección 3.7.

En las respuestas de 2020, vimos más énfasis en los enfoques que abordan la modelación, el pensamiento crítico y la alfabetización matemática o estadística. Además, los encuestados destacaron la importancia de promover la interacción, la colaboración y el pensamiento de orden superior, que generalmente se consideran más desafiantes en la educación a distancia. Un enfoque que vale la pena destacar es la educación basada en desafíos (cf. Johnson *et al.*

2009), porque toma los grandes desafíos sociales mencionados en la sección anterior como su motivación y orientación.

3.1.2 Currículo

Los enfoques por los cuales la educación matemática puede contribuir a los objetivos antes mencionados se pueden distinguir en varios niveles. Varios encuestados mencionaron los desafíos en torno al desarrollo de un plan de estudios de matemáticas coherente, suavizar las transiciones a niveles escolares superiores y equilibrar los temas, y también la sobrecarga típica de temas, la influencia de la evaluación en lo que se enseña y lo que los maestros pueden enseñar. Por ejemplo, se mencionó que los profesores de matemáticas a menudo no están preparados para enseñar estadística. Parece haber poca investigación que ayude a los autores del currículo a abordar algunas de estas preguntas difíciles, así como a monitorear la reforma (cf. Shimizu y Vithal, 2019). El análisis de libros de texto se menciona como un esfuerzo de investigación necesario. Pero incluso si los currículos dentro de un sistema educativo son razonablemente coherentes, ¿cómo se puede garantizar la continuidad entre los sistemas educativos (cf. Jansen *et al*., 2012)?

En las respuestas de 2020, algunos encuestados pidieron recursos curriculares gratuitos de alta calidad. En varios países donde el acceso a Internet es un problema en las zonas rurales, se puede observar un cambio de los recursos en línea a otros tipos de medios como la radio y la televisión.

3.2 Objetivos de la educación matemática

El tema de los enfoques está estrechamente vinculado al del tema de los objetivos. Por ejemplo, como escribió Fulvia Furinghetti (Italia): "Es ampliamente reconocido que el pensamiento crítico es un objetivo fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, todavía no está claro cómo se persigue en la práctica". Distinguimos objetivos sociales amplios y objetivos educativos más específicos. Estos a menudo están relacionados, como escribió Jane Watson (Australia): "Si la educación va a resolver los problemas sociales, culturales, económicos y ambientales del mundo actual basado en datos, se debe prestar atención a preparar a los estudiantes para interpretar los datos que se les presentan en estos campos".

3.2.1 Objetivos sociales

Los encuestados aludieron a la necesidad de que los estudiantes aprendan a funcionar en la economía y en la sociedad en general. Además de los objetivos instrumentales de la educación matemática, algunos enfatizaron los objetivos relacionados con el desarrollo como ser humano, por ejemplo, aprender a ver las matemáticas en el mundo y desarrollar una relación con el mundo. La educación matemática en estos puntos de vista debe capacitar a los estudiantes para combatir las tendencias anti-experiencia y post-hecho. Varios encuestados mencionaron objetivos sociales aún más grandes, como evitar la extinción como especie humana y el nacionalismo tóxico, resolver el cambio climático y construir un futuro sostenible.

En la segunda ronda de respuestas (2020), vimos más énfasis en estos grandes problemas sociales. La urgencia de orientar la educación matemática (y su investigación) hacia la resolución de estos grandes problemas parecía sentirse más que antes. En resumen, se hizo hincapié en que nuestro planeta necesita ser salvado. La gran pregunta es qué papel puede desempeñar la educación matemática para enfrentar estos desafíos.

3.2.2 Objetivos educativos

Varios encuestados expresaron su preocupación por el hecho de que los objetivos actuales de la educación matemática no reflejaran bien las necesidades e intereses de la humanidad y las sociedades. Los objetivos educativos que se destacaron más fueron: la alfabetización matemática, la aritmética, el pensamiento crítico y creativo, a menudo con referencia al mundo cambiante y al planeta en riesgo. En particular, se enfatizó con frecuencia el impacto de la tecnología, ya que puede tener una trascendencia en lo que las personas necesitan aprender (cf. Gravemeijer *et al.*, 2017). Si las computadoras pueden hacer cosas particulares mejor que las personas, ¿qué es lo que los estudiantes necesitan aprender?

Entre los objetivos educativos mencionados con mayor frecuencia para la educación matemática se encuentran la alfabetización estadística, el pensamiento computacional y algorítmico, la inteligencia artificial, la modelación y la ciencia de datos. En términos generales, los encuestados expresaron que la educación matemática debería ayudar a los estudiantes a desplegar evidencia, razonamiento, argumentación y pruebas. Por ejemplo, Michelle Stephan (EE.UU.) preguntó:

> ¿Qué contenido de matemáticas se debe enseñar hoy para preparar a los estudiantes para los trabajos del futuro, especialmente dado el crecimiento del mundo digital y su impacto en una economía global? Todo el contenido matemático en K-12 puede ser logrado por computadoras, entonces, ¿qué procedimientos matemáticos se vuelven menos importantes y qué dominios deben explorarse más a fondo (por ejemplo, estadística y big data, geometría espacial, razonamiento funcional, etc.)?

Un desafío para la investigación es que no existe una metodología clara para llegar a objetivos de aprendizaje relevantes y factibles. Sin embargo, es necesario elegir y formular tales objetivos sobre la base de la investigación (cf. Van den Heuvel-Panhuizen, 2005).

Varias de las respuestas de 2020 mencionaron la forma a veces problemática en que se utilizan los números, los datos y los gráficos en la esfera pública (por ejemplo, Ernest, 2020; Kwon *et al*., 2021; Yoon *et al*., 2021). Varios encuestados vieron reforzado su énfasis en objetivos educativos relevantes, por ejemplo, la alfabetización estadística y de datos, la modelación, el pensamiento crítico y la comunicación pública. Se mencionaron algunos temas específicos de la pandemia, como el crecimiento exponencial.

3.3 Relación de la educación matemática con otras prácticas

Varias respuestas pueden caracterizarse como el resultado del cruce de límites (Akkerman y Bakker, 2011) con disciplinas o comunidades fuera de la educación matemática, como en ciencia, tecnología, ingeniería, arte y educación matemática (STEM o STEAM, por sus siglas en inglés), padres o familias, el lugar de trabajo y, el ocio (por ejemplo, teatro, música, deportes). Un ejemplo interesante fue el potencial educativo de los memes matemáticos: "objetos digitales humorísticos creados por usuarios de la web que copian una imagen existente y superponen un título personal" (Bini *et al*., 2020, p. 2). Estas respuestas relacionadas con el cruce de fronteras enfatizan los movimientos y las conexiones entre la educación matemática y otras prácticas.

En las respuestas de 2020, vimos que, durante la pandemia, la relación entre la escuela y el hogar se ha vuelto mucho más importante, porque la mayoría de los estudiantes estaban (y quizás todavía están) aprendiendo en casa. Investigaciones anteriores sobre la participación de los padres y la tarea (Civil y Bernier, 2006; de Abreu *et al*., 2006; Jackson, 2011) resulta relevante en la situación actual en la que muchos países siguen estando confinados. Los encuestados señalaron la necesidad de monitorear a los estudiantes y su trabajo y promover la autorregulación. También ponen más énfasis en los contextos políticos, económicos y financieros en los que funciona la educación matemática (o funciona mal, en opinión de algunos encuestados).

3.4 Desarrollo profesional docente

Los encuestados mencionaron explícitamente el desarrollo profesional docente como un dominio importante de la investigación en educación matemática (incluido el desarrollo de los formadores de docentes). Por ejemplo, Loide Kapenda (Namibia) escribió: "Estoy apoyando a la UNESCO, cuya idea es centrarse en cómo preparamos a los docentes para el futuro que queremos" (por ejemplo, UNESCO, 2015) y, Francisco Rojas (Chile) escribió:

> Aunque el ámbito de la educación matemática es amplio y cada vez se enfrenta a nuevos retos (demandas sociopolíticas, nuevos contextos interculturales, entornos digitales, etc.), todos ellos serán manejados en el colegio por el profesor de matemáticas, tanto en primaria como en secundaria. Por lo tanto, desde mi punto de vista, la formación previa al servicio del profesorado es uno de los campos de investigación más relevantes para la próxima década, especialmente en los países en desarrollo.

Es evidente por las respuestas que, la enseñanza de las matemáticas es realizada por una gran variedad de personas no solo por personas que están entrenadas como maestros de escuela primaria, maestros de matemáticas de escuela secundaria o matemáticos, sino también por padres, maestros fuera del campo y científicos cuya disciplina primaria no son las matemáticas pero que usan matemáticas o estadística. La forma en que se capacitan los maestros de matemáticas varía en consecuencia. Los encuestados señalaron con frecuencia la importancia del conocimiento de la materia y señalaron en particular que muchos maestros parecen estar mal preparados para enseñar estadística (por ejemplo, Lonneke Boels, Países Bajos).

Varios colegas plantearon preguntas clave: "¿Cómo capacitar a profesores de matemáticas con una base sólida en matemáticas, actitudes positivas hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y una amplia base de conocimientos vinculada a STEM?" (anónimo); "¿Qué desarrollo profesional, particularmente en el nivel postsecundario, motiva cambios en las prácticas docentes para brindar a los estudiantes la oportunidad de involucrarse con las matemáticas y tener éxito? (Laura Watkins, Estados Unidos); "¿Cómo pueden los educadores de matemáticas equipar a los estudiantes para una ciudadanía sostenible y equitativa? ¿Y cómo puede la educación matemática equipar a los maestros para apoyar a los estudiantes en esto?" (David Wagner, Canadá).

En las respuestas de 2020, quedó claro que los maestros son increíblemente importantes, especialmente en la era de la pandemia. El cambio repentino a la enseñanza en línea significa que

> Se plantean requisitos más altos para la capacidad educativa y docente de los maestros, especialmente la capacidad de llevar a cabo la educación y la enseñanza mediante el uso de la tecnología de la información. En segundo lugar, la capacidad de los docentes para comunicarse y cooperar ha sido inyectada con una nueva connotación. (Guangming Wang, China)

En términos generales, se asume que la educación permanecerá parcialmente en línea, aunque más en los niveles superiores de educación que en la educación primaria. Esto tiene implicaciones para los maestros, por ejemplo, tendrán que pensar en cómo pretenden coordinar la enseñanza en el lugar y en línea. Por lo tanto, un enfoque importante para el desarrollo profesional es el uso de la tecnología.

3.5 Tecnología

La tecnología merece ser un tema en sí misma, pero queremos enfatizar que atravesó la mayoría de los otros temas. En primer lugar, algunos encuestados argumentaron que, debido a los avances tecnológicos en la sociedad, los objetivos sociales y educativos de la educación matemática se deben cambiar (por ejemplo, el pensamiento computacional para garantizar la empleabilidad en una sociedad tecnológica). En segundo lugar, las respuestas indicaron que los objetivos modificados tienen implicaciones para los enfoques en la educación matemática. Consideremos la reforma curricular requerida y las herramientas digitales que se utilizarán en ella. Los estudiantes no solo necesitan aprender a usar la tecnología; esta también se puede utilizar para aprender matemáticas (por ejemplo, visualización, un diseño que integra la experiencia corporal (embodied design), pensamiento estadístico). Las nuevas tecnologías como la impresión 3D, las matemáticas fotográficas y la realidad aumentada y virtual ofrecen nuevas oportunidades para el aprendizaje. La sociedad ha cambiado rápidamente en este sentido. En tercer lugar, se sugiere que la tecnología ayude a establecer conexiones con otras prácticas, como entre la escuela y el hogar, o la educación vocacional y el trabajo, a pesar de que existe gran disparidad en el éxito de estas conexiones.

En las respuestas de 2020, hubo gran preocupación por la brecha digital actual (cf. Hodgen *et al.*, 2020). Por lo tanto, la pandemia de COVID-19 ha dado motivos para que la investigación en educación matemática comprenda mejor cómo se pueden mejorar las conexiones entre las prácticas educativas y de otro tipo con la ayuda de la tecnología. Dada la distribución desigual de la ayuda por parte de los padres o tutores, se vuelve aún más importante pensar en cómo los maestros pueden usar videos y cuestionarios, cómo pueden monitorear a sus estudiantes, cómo pueden evaluarlos (respetando la privacidad) y cómo se puede compensar la falta de interacción social, gestual y encarnada que es posible cuando están juntos físicamente.

La tecnología móvil se consideraba muy innovadora antes de 2010, los teléfonos inteligentes se convirtieron en dispositivos centrales en la educación matemática en la pandemia con su dependencia del aprendizaje a distancia. Nuestra experiencia directa mostró que las aplicaciones telefónicas como WhatsApp y WeChat se han convertido en herramientas clave para enseñar y aprender matemáticas en muchas áreas rurales en varios continentes donde pocas personas tienen computadoras (para un informe sobre podcasts distribuidos a través de WhatsApp, altavoces comunitarios y estaciones de radio locales en Colombia, ver Saenz *et al.*, 2020).

3.6 Equidad, diversidad e inclusión

Otro tema transversal puede etiquetarse como “equidad, diversidad e inclusión”. Utilizamos esta tripleta para cubrir cualquier tema que destaque estos y otros valores humanos relacionados, como la igualdad, la justicia social y racial, la emancipación social y la democracia, que también fueron mencionados por los encuestados (cf. Dobie y Sherin, 2021). En términos de objetivos educativos, algunos encuestados enfatizaron que la educación matemática debería ser para todos los estudiantes, incluidos aquellos que tienen necesidades especiales, que viven en la pobreza, que están aprendiendo el idioma de instrucción, que tienen antecedentes migratorios, que se consideran LGBTQ+, que tienen una historia traumática o violenta, o están marginados de alguna manera. Existe un amplio consenso de que todos deben tener acceso a una educación matemática de alta calidad. Sin embargo, como señala Niral Shah (EE.UU.), se ha prestado poca atención a "cómo los fenómenos relacionados con los marcadores sociales (por ejemplo, raza, clase, género) interactúan con los fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos".

En términos de enfoques de enseñanza, la educación matemática es caracterizada por algunos encuestados de países particulares como predominantemente un espacio en blanco donde algunos grupos se sienten o son excluidos (cf. Battey, 2013). Existe una preocupación general de que las prácticas actuales de enseñanza de matemáticas puedan perpetuar la desigualdad, en particular en la pandemia actual. En términos de evaluación, las matemáticas se usan o experimentan con demasiada frecuencia como un filtro en lugar de como un recurso poderoso (cf. Martin *et al.*, 2010). Steve Lerman (Reino Unido), indica que "comprender cómo las oportunidades educativas se distribuyen de manera desigual, y en particular cómo se manifiesta en cada extremo de cada aula, es un requisito previo para realizar cambios que puedan tener algún impacto en la redistribución". Por lo tanto, un objetivo clave de la investigación es comprender qué excluye a los estudiantes del aprendizaje de las matemáticas y qué haría que la educación matemática sea más inclusiva (cf. Roos, 2019). Y, ¿cómo es el desarrollo profesional de los docentes que promueve la equidad?

En 2020, muchos encuestados vieron reforzado su énfasis en la equidad y los valores relacionados en la pandemia actual con sus riesgos de una brecha digital, acceso desigual a una educación matemática de alta calidad y distribución injusta de los recursos. Un tema de investigación futuro relacionado es cómo se pueden remediar las llamadas brechas de rendimiento cada vez mayores (cf. Bawa, 2020). Sin embargo, también se formularon advertencias de que pensar en términos tan deficitarios puede perpetuar la desigualdad (cf. Svensson *et al.*, 2014). Una pregunta planteada por Dor Abrahamson (EE.UU.) es: "¿Qué papel podría desempeñar la tecnología digital, y en qué formas, en la restauración de la justicia y la celebración de la diversidad?"

3.7 Afecto

Aunque enredado con otros temas, vale la pena destacar el afecto como un tema en sí mismo. Usamos el término afecto en un sentido amplio para señalar fenómenos psicológico-sociales como: la emoción, el amor, la creencia, las actitudes, el interés, la curiosidad, la diversión, el compromiso, la alegría, la participación, la motivación, la autoestima, la identidad, la ansiedad, la alienación y la sensación de seguridad (cf. Cobb *et al.*, 2009; Darragh, 2016; Hannula, 2019; Schukajlow *et al.*, 2017). Algunos encuestados enfatizaron la importancia de estudiar estos constructos en relación con (y no separados de) lo que se caracteriza como cognición. Otros señalaron que el afecto no es solo un fenómeno individual sino también social, al igual que el aprendizaje (cf. Chronaki, 2019; de Freitas *et al.*, 2019; Schindler y Bakker, 2020).

Entre los objetivos educativos de la educación matemática, varios participantes mencionaron la necesidad de generar y fomentar el interés por las matemáticas. En términos de enfoques, se puso énfasis en la necesidad de evitar la ansiedad y la alienación y de involucrar a los estudiantes en la actividad matemática.

En las respuestas de 2020, se puso más énfasis en la preocupación por la alienación que, parece ser de especial preocupación cuando los estudiantes están socialmente distanciados de sus compañeros y maestros en cuanto a cuando la enseñanza se lleva a cabo solo a través de la tecnología. Lo que se reiteró en estas respuestas fue la importancia del sentido de pertenencia de los estudiantes en un aula de matemáticas (cf. Horn, 2017), un tema estrechamente relacionado con el tema de equidad, diversidad e inclusión discutido anteriormente.

3.8 Evaluación

La evaluación y la acreditación no se mencionaron a menudo explícitamente, pero no parecen menos importantes que los otros temas relacionados. Un desafío clave es evaluar lo que valoramos en lugar de valorar lo que evaluamos. En investigaciones anteriores, la acreditación de estudiantes individuales ha recibido más atención, pero lo que parece descuidarse es la evaluación de los planes de estudio. Como escribió Chongyang Wang (China): "¿Cómo evaluar las reformas curriculares, cuando ponemos mucha energía en la reforma de nuestra educación y plan de estudios?, ¿imaginamos cómo garantizar que funcione y que se encuentren pruebas después de que se lleven a cabo los nuevos planes de estudio? ¿Cómo demostrar que las reformas funcionan e importan?" (cf. Shimizu y Vithal, 2019).

En las respuestas de 2020, se hizo hincapié en la evaluación a distancia. La educación a distancia generalmente se enfrenta al desafío de acreditar el trabajo de los estudiantes, tanto formativa como sumativa. Predecimos que la llamada evaluación electrónica, junto con sus desafíos de privacidad, generará mucho interés de investigación en el futuro cercano (cf. Bickerton y Sangwin, 2020).

4. LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN SÍ MISMA

Aunque solo preguntamos por temas futuros, varios encuestados hicieron comentarios interesantes sobre la investigación en educación matemática y sus conexiones con otras disciplinas y prácticas (como la práctica educativa, la política, los entornos domésticos). Hemos agrupado estas consideraciones bajo los subtítulos de teoría, metodología, reflexión sobre nuestra disciplina e interdisciplinariedad y transdisciplinariedad. Al igual que con la categorización anterior en temas, enfatizamos que estos cuatro tipos no son mutuamente excluyentes, ya que las consideraciones teóricas y metodológicas pueden estar intrincadamente entrelazadas (Radford, 2008).

4.1 Teoría

Varios encuestados expresaron su preocupación por la fragmentación y diversidad de las teorías utilizadas en la investigación en educación matemática (cf. Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014). Se planteó la pregunta de cómo los educadores de matemáticas pueden "trabajar juntos para obtener hallazgos válidos, confiables, replicables y útiles en nuestro campo" y "¿Cómo, como disciplina, podemos alentar la investigación sostenida sobre preguntas centrales utilizando perspectivas y métodos conmensurables?" (Keith Weber, Estados Unidos). Uno de los deseos era "comparar perspectivas teóricas para el poder explicativo" (K. Subramaniam, India). Al mismo tiempo, se subrayó que "no podemos seguir pretendiendo que hay una sola cultura en el campo de la educación matemática, que todo marco teórico puede aplicarse en cualquier cultura y que los resultados son universales" (Mariolina Bartolini Bussi, Italia). Además, se expresó el deseo de profundizar nociones teóricas como alfabetismo numérico (numeracy), equidad y justicia a medida que se desarrollan en la educación matemática.

4.2 Metodología

Se mencionaron diversos enfoques metodológicos como potencialmente útiles en la investigación de la educación matemática: estudios aleatorios, estudios experimentales, replicación, estudios de casos, etc. Se prestó especial atención a "metodologías complementarias que cierran la 'brecha' entre la investigación en educación matemática y la investigación en cognición matemática" (Christian Bokhove, Reino Unido), como, por ejemplo, se hizo en Gilmore *et al.* (2018). Además, se mencionaron enfoques que pretenden cerrar la llamada brecha entre la práctica educativa y la investigación, como el estudio de lecciones y la investigación de diseño. Por ejemplo, Kay Owens (Australia) señaló el desafío de estudiar el contexto cultural y la identidad: "Tal investigación requiere una metodología de investigación multifacética que puede necesitar ser desentrañada de nuestros enfoques cualitativos actuales (por ejemplo, etnográficos) y cuantitativos (pruebas de 'papel y lápiz' (incluida la computación)). La investigación de diseño puede proporcionar más posibilidades".

Francisco Rojas (Chile) destacó la necesidad de una investigación más longitudinal y transversal, en particular en el contexto del desarrollo profesional docente:

> No basta con investigar qué sucede en la formación docente pre-servicio, sino entender qué efectos tiene esta formación en los primeros años de la carrera profesional de los nuevos profesores de matemáticas, tanto en la educación primaria como en la secundaria. Por lo tanto, se requerirán estudios cada vez más longitudinales y transversales para comprender la complejidad de la práctica de los profesores de matemáticas, cómo evoluciona el conocimiento profesional que articula la práctica y qué efectos tiene la práctica de los profesores en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

4.3 Reflexión sobre nuestra disciplina

Se hicieron llamados a la reflexión crítica sobre nuestra disciplina. Un llamamiento anónimo fue a una mayor autocrítica y modestia científica: ¿La investigación está dando resultados, o está alejando a los buenos maestros de la enseñanza? ¿Investigamos principalmente para ayudar a mejorar la educación matemática o para comprender mejor los fenómenos? (cf. Proulx y Maheux, 2019) La esencia general de las respuestas fue un sincero deseo de ser de valor para el mundo y la educación matemática más específicamente y no solo hacer "investigación por el bien de la investigación" (Zahra Gooya, Irán). David Bowers (EE.UU.) expresó varios puntos de vista que invitan a la reflexión sobre la naturaleza de nuestra disciplina, por ejemplo:

- Debemos normalizar (y esperar) la plena toma de los fundamentos filosóficos y teóricos de todo nuestro trabajo (incluso el trabajo que no se considera "filosófico"). No hacerlo conduce a análisis e implicaciones acríticas.
- Debemos desarrollar normas en las que se considere vergonzoso hacer una investigación "acrítica".
- No existe tal cosa como "neutral". Entre otras cosas, esto significa que deberíamos cultivar normas que reconozcan la naturaleza política inherente de todo trabajo, y normas que reconozcan cómo el trabajo superficialmente "neutral" tiende a empoderar al opresor.
- Debemos reconocer la existencia del privilegio, pero no atender a la fragilidad del privilegio.

En términos de lo que se estudia, algunos encuestados consideraron que en la investigación en educación matemática "la literatura se ha alejado de los objetivos originales de la educación matemática. Parece que hemos estado investigando todo menos el aprendizaje real de importantes temas matemáticos" (Lyn English, Australia). En términos de la naturaleza de nuestra disciplina, Taro Fujita (Reino Unido) argumentó que nuestra disciplina puede caracterizarse como una ciencia del diseño, con el diseño de entornos de aprendizaje matemático como el núcleo de las actividades de investigación (cf. Wittmann, 1995).

Una tensión que observamos en diferentes puntos de vista es la siguiente: Por un lado, la investigación en educación matemática tiene su origen en ayudar a los profesores a enseñar mejor determinados contenidos. La necesidad de la llamada investigación didáctica y temática no es menos importante hoy en día, pero tal vez menos de moda para financiar esquemas que promuevan la investigación innovadora y revolucionaria. Por otro lado, con el tiempo ha quedado claro que la educación matemática es un esfuerzo sociocultural y político multifacético bajo la influencia de diversos poderes locales y globales. Por lo tanto, no es sorprendente que el campo de la investigación en educación matemática se haya expandido para incluir una gama cada vez más amplia de temas que están en juego, como la marginación de grupos particulares. Por lo tanto, destacamos la respuesta de Niral Shah (EE.UU.) de que "históricamente, estos dominios de investigación [contenido específico vs sociopolítico] se han desacoplado. El campo se acercaría más a la comprensión de las experiencias de los estudiantes si pudiéramos conectar estas líneas de investigación".

Otro tema reflexivo interesante fue planteado por Nouzha El Yacoubi (Marruecos): "¿Hasta qué punto podemos transponer preguntas de investigación de los países desarrollados a los países en desarrollo?" Como miembros del panel plenario en PME 2019 (por ejemplo, Kazima, 2019; Kim, 2019; Li, 2019) transmitir bien, adoptar intervenciones que tuvieron éxito en un lugar en otro lugar está lejos de ser trivial (cf. Gorard, 2020).

Juan L. Piñeiro (España en 2019, Chile en 2020) destacó que "los conceptos y procesos matemáticos tienen diferentes naturalezas. Por lo tanto, ¿se puede caracterizar utilizando las mismas herramientas teóricas y metodológicas?" En términos más generales, uno puede preguntarse si nuestras teorías y metodologías, a menudo tomadas de otras disciplinas, se adaptan bien a la ontología de nuestra propia disciplina. Parece que valdría la pena continuar una discusión iniciada por Niss (2019) sobre la naturaleza de nuestra disciplina, respondida por Bakker (2019) y Cai y Hwang (2019).

Una pregunta importante planteada en varios comentarios es cuán cercana debe estar la investigación a los planes de estudio existentes. Un encuestado (Benjamin Rott, Alemania) señaló que la investigación sobre el planteamiento de problemas a menudo "no encaja en los planes de estudio escolares. Esto hace que la aplicación de ideas y hallazgos de investigación sea problemática. Sin embargo, se podría argumentar que la investigación no siempre tiene que estar vinculada a los contextos educativos (locales) existentes. También puede ser inspirador, buscando principios de lo que es posible (y cómo) con una visión a más largo plazo sobre cómo los planes de estudio pueden cambiar en el futuro. Una opción es, como sugiere Simon Zell (Alemania), probar diseños que cubran un período de tiempo más largo de lo que normalmente se hace. Otra forma de unir estos dos extremos es "la colaboración entre profesores e investigadores en el diseño y la publicación de investigaciones" (K. Subramaniam, India), como se promueve facilitando a los profesores la realización de investigaciones de doctorado (Bakx *et al*., 2016).

Uno de los profesores-investigadores que respondieron (Lonneke Boels, Países Bajos) expresó el deseo de que la investigación estuviera disponible "en una forma más accesible. Este deseo plantea las preguntas más generales de quién tiene la responsabilidad de hacer tal trabajo de traducción y cómo comunicarse con los no investigadores. ¿Necesitamos un tipo particular de investigación en comunicación dentro de la educación matemática para aprender a transmitir ideas clave particulares o hallazgos sólidos? (cf. Bosch *et al*., 2017)

4.4 Interdisciplinariedad y transdisciplinariedad

Varios encuestados mencionaron disciplinas de las que la investigación en educación matemática puede aprender o con las que debería colaborar (cf. Suazo-Flores *et al*., 2021). Algunos ejemplos son historia, matemáticas, filosofía, psicología, psicometría, pedagogía, ciencias de la educación, educación en valores (social, emocional), teoría de la raza, educación urbana, neurociencia / investigación cerebral, ciencia cognitiva y didáctica de la informática. "Un gran desafío aquí es cómo hacer que diversos expertos se acerquen y hablen entre sí de una manera productiva" (David Gómez, Chile)

Una de las disciplinas más frecuentemente mencionadas en relación con nuestro campo es la historia. Es una queja común en, por ejemplo, la historia de la medicina que los historiadores acusan a los expertos médicos de no conocer la investigación histórica y los expertos médicos acusan a los historiadores de no entender la disciplina médica lo suficientemente bien (Beckers y Beckers, 2019). Esta tensión plantea la cuestión de quién investiga y quién debe investigar sobre la historia de las matemáticas o de la educación matemática y con qué propósito.

Algunas respuestas van más allá de la interdisciplinariedad, porque resolver los problemas más grandes, como el cambio climático y una sociedad más equitativa, requiere la colaboración con no investigadores (transdisciplinariedad). Un ejemplo típico es la participación de la práctica y la política educativa en el mejoramiento de la educación matemática (por ejemplo, Potari *et al*., 2019).

Terminemos esta sección con unas palabras de esperanza, de un encuestado anónimo: "Todavía creo (¿o espero?) que la pandemia, con este hecho explícito de las desigualdades, ayudaría a los educadores de matemáticas a analizar las desigualdades persistentes y sistémicas de manera más consistente en los próximos años. Haber aprendido tanto en el último año podría proporcionar una oportunidad para establecer una "nueva normalidad" más equitativa, en lugar de una reversión a la vieja normalidad, que preocupaba a un crítico".

5. LOS TEMAS EN SU COHERENCIA: UNA IMPRESIÓN ARTÍSTICA

Como se describió, identificamos ocho temas de investigación en educación matemática para el futuro, que discutimos uno por uno. La desventaja de esta discusión es que el enredo de los temas es de fondo. Para compensar ese inconveniente, aquí hacemos una breve interpretación del dibujo de la figura 1. Al hacerlo, invitamos a los lectores a usar su propia imaginación creativa y tal vez usar el dibujo para otros fines (por ejemplo, pregunte a los investigadores, estudiantes o maestros: ¿Dónde le gustaría estar en este paisaje? ¿Qué ideas matemáticas detecta?). El dibujo se centra principalmente en los temas que surgieron de la primera ronda de respuestas, pero también hace alusión a las experiencias de la época de la pandemia, por ejemplo, la educación a distancia. En el Apéndice 1, especificamos más detalles en el dibujo y proporcionamos un enlace a una imagen anotada (https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28937/).

El barco en el río tiene como objetivo representar enfoques de enseñanza. El dibujo a mano del barco insinúa la importancia del diseño educativo: se está elaborando un enfoque particular. En el barco, un maestro y los estudiantes trabajan juntos hacia objetivos educativos y sociales, más abajo del río. El puente de graduación es un objetivo educativo intermedio para aprobar, después del cual hay muchos caminos que conducen a otros objetivos, como la educación superior, la ciudadanía y el trabajo en la sociedad. También se muestran las relaciones con las prácticas fuera de la educación matemática. En la esquina inferior izquierda, la casa y los padres que trabajan y juegan con los niños representan el vínculo de la educación con la situación del hogar y la actividad de ocio.

El profesor, representado por el capitán en primer plano del barco, se dedica al desarrollo profesional, consultando un libro, pero también aprendiendo en la práctica (cf. Bakkenes *et al.*, 2010, sobre experimentación, uso de recursos, etc.). Además de la graduación, hay otros tipos de objetivos para maestros y estudiantes por igual, como la equidad, el afecto positivo y el uso fluido de la tecnología. Durante su viaje (y parcialmente en casa, que se muestra en la esquina inferior izquierda), los estudiantes aprenden a orientarse matemáticamente en el mundo (por ejemplo, árbol fractal, lago elíptico, una montaña parabólica y varios sólidos platónicos). En su camino hacia varios objetivos, tanto el maestro como los estudiantes usan tecnología particular (por ejemplo, brújula, binoculares, tableta, computadora portátil). La lupa (que representa la investigación) se acerca a la pantalla de una computadora portátil que retrata la educación a distancia, insinuando el consenso de que la pandemia magnifica algunos problemas que la educación ya enfrentaba (por ejemplo, la brecha digital).

La equidad, la diversidad y la inclusión están representadas con el arco iris, que abarca todo. En el barco, los estudiantes reciben el mismo trato y la práctica de navegación es inclusiva en el sentido de que todos se desempeñan a su propio nivel, obteniendo el apoyo que necesitan mientras contribuyen significativamente a la actividad compartida. Esto es al menos lo que leemos en la imagen. El afecto es visible de varias maneras. En primer lugar, el clima representa estados de ánimo en general (lado lluvioso y oscuro a la izquierda; lado brillante soleado a la derecha). En segundo lugar, los estudiantes individuales (por ejemplo, en el nido del cuervo) están interesados, ansiosos y atentos a las cosas que surgen durante su viaje. Están motivados para participar en todo tipo de tareas (manejar las velas, jugar un juego de azar con un dado, hacer guardia en el nido del cuervo, etc.). En el puente, el orgullo y la felicidad de los graduados insinúan un afecto positivo como un objetivo educativo, pero también representan la parte del examen de la evaluación. La evaluación también ocurre en términos de controles y comentarios sobre el barco. Las dos personas al lado de la casa (una con una cámara, otra midiendo) pueden ser vistas como asesores o investigadores que observan y evalúan el progreso en el barco o el progreso del barco.

En términos generales, los tres tipos de barcos en el dibujo representan tres espacios diferentes, que Hannah Arendt (1958) caracterizaría como privados (bote doblado en papel cerca del niño y un pequeño bote de juguete junto a la niña con su padre en casa), público / político (barcos en el horizonte) y el espacio intermedio de la educación (el bote con el maestro y los estudiantes). Los estudiantes y el profesor en el barco ilustran la escuela como una forma pedagógica especial. Masschelein y Simons (2019) argumentan que la antigua idea griega detrás de la escuela (σχολή, scholè, tiempo libre) es que todos los estudiantes deben ser tratados como iguales y todos deben tener las mismas oportunidades. En la escuela, su descenso no importa. En la escuela, hay tiempo para estudiar, para cometer errores, sin tener que trabajar para ganarse la vida. En la escuela, aprenden a colaborar con otros de diversos orígenes, en preparación para la vida futura en el espacio público. Uno de los desafíos de la situación de confinamiento como consecuencia de la pandemia es cómo organizar este espacio intermedio de una manera que mantenga su forma pedagógica especial.

6. RETOS DE INVESTIGACIÓN

Basándonos en los ocho temas y consideraciones sobre la investigación en educación matemática en sí, formulamos un conjunto de desafíos de investigación que nos parecen merecedores de una mayor discusión (cf. Stephan *et al.*, 2015). No pretendemos sugerir que estos son más importantes que otros o que algunos otros temas son menos dignos de investigación, ni sugerimos que impliquen una agenda de investigación (cf. English, 2008).

6.1 Alinear nuevos objetivos, currículos y enfoques de enseñanza

Parece haber relativamente poca atención dentro de la investigación de educación matemática para cuestiones curriculares, incluidos temas como objetivos de aprendizaje, estándares curriculares, programas de estudios, progresiones de aprendizaje, análisis de libros de texto, coherencia curricular y alineación con otros planes de estudio. Sin embargo, creemos que nosotros, como investigadores de educación matemática, debemos preocuparnos por estos temas, ya que no necesariamente están cubiertos por otras disciplinas. Por ejemplo, a juzgar por la queja de Deng (2018) sobre las tendencias en la disciplina de los estudios curriculares, no podemos asumir que los académicos en ese campo aborden cuestiones específicas del currículo centrado en las matemáticas (por ejemplo, el *Journal of Curriculum Studies* y *Curriculum Inquiry* han publicado solo un número limitado de estudios sobre currículos de matemáticas).

Las metas de aprendizaje forman un elemento importante de los currículos o estándares. Es relativamente fácil formular objetivos importantes en términos generales (por ejemplo, pensamiento crítico o resolución de problemas). Como ejemplo específico, considere el planteamiento de problemas matemáticos (Cai y Leikin, 2020), que los estándares curriculares han señalado específicamente como un objetivo educativo importante: desarrollar las habilidades de los estudiantes para plantear problemas. Los estudiantes deben tener la oportunidad de formular sus propios problemas basados en situaciones. Sin embargo, hay pocas actividades para plantear problemas en los libros de texto de matemáticas actuales y en la instrucción en el aula (Cai y Jiang, 2017). Se puede hacer una observación similar sobre la resolución de problemas en los libros de texto de primaria holandeses (Kolovou *et al.*, 2009). Por lo tanto, existe la necesidad de que los investigadores y educadores alineen el planteamiento de problemas en los estándares curriculares, los libros de texto, la instrucción en el aula y el aprendizaje de los estudiantes.

El desafío que vemos para los investigadores de educación matemática es colaborar con académicos de otras disciplinas (interdisciplinariedad) y con no investigadores (transdisciplinariedad) para descubrir cómo se pueden configurar los objetivos sociales y educativos deseados en la educación matemática. Nuestra disciplina ha desarrollado varios enfoques metodológicos que pueden ayudar a formular objetivos de aprendizaje y acompañar los enfoques de enseñanza (cf. Van den Heuvel Panhuizen, 2005), incluidos los análisis epistemológicos (Sierpinska, 1990), la fenomenología histórica y didáctica (Bakker y Gravemeijer, 2006; Freudenthal, 1986), y estudios en el lugar de trabajo (Bessot y Ridgway, 2000; Hoyles y otros, 2001). Sin embargo, ¿cómo deberían sopesarse los resultados de tales enfoques de investigación entre sí y combinarse para formular objetivos de aprendizaje para un currículo equilibrado y coherente? ¿Cuál es el papel de los investigadores de educación matemática en relación con los docentes, los responsables políticos y otras partes interesadas (Potari *et al.*, 2019)? En nuestra disciplina, parece que carecemos de una forma basada en la investigación de llegar a la formulación de objetivos educativos adecuados sin sobrecargar los planes de estudio.

6.2 Investigación de la educación matemática en todos los contextos

Aunque metodológica y teóricamente desafiante, es de gran importancia estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en todos los contextos. Después de todo, los estudiantes no solo aprenden en la escuela; también pueden participar en entornos informales (Nemirovsky *et al.*, 2017), foros en línea o redes de afinidad (Ito *et al.*, 2018) donde pueden compartir, por ejemplo, memes matemáticos (Bini *et al.*, 2020). Además, los maestros no son los únicos que enseñan matemáticas: tutores privados, amigos, padres, hermanos u otros familiares también pueden participar en ayudar a los niños con sus matemáticas. El aprendizaje de las matemáticas también podría situarse en las calles o en museos, hogares y otros entornos informales. Esto ya se reconocía antes de 2020, pero la pandemia ha alejado a los estudiantes y maestros de las ubicaciones típicas de las escuelas centrales y, por lo tanto, ha cambiado la distribución del trabajo.

En particular, los espacios físicos y virtuales de aprendizaje se han reconfigurado debido a la pandemia. Los problemas de tiempo también funcionan de manera diferente en línea, por ejemplo, si los estudiantes pueden ver conferencias o videos en línea cuando lo deseen (de forma asincrónica). Tales reconfiguraciones del espacio y el tiempo también tienen un efecto en el ritmo de la educación y, por lo tanto, en los niveles de energía de las personas (cf. Lefebvre, 2004).

Más específicamente, la configuración de la situación ha afectado los niveles de motivación y concentración de muchos estudiantes (por ejemplo, Meeter *et al.*, 2020). Como reconocieron Engelbrecht *et al.* (2020), la pandemia ha cambiado drásticamente el modelo de enseñanza y aprendizaje tal como lo conocíamos. Es muy posible que algunas teorías existentes sobre la enseñanza y el aprendizaje ya no se apliquen de la misma manera. Una pregunta interesante es si y cómo se pueden ajustar los marcos teóricos existentes o si es necesario desarrollar nuevas orientaciones teóricas para comprender mejor y promover formas productivas de enseñanza combinada o en línea, en todos los contextos.

6.3 Focalización en el desarrollo profesional docente

El desarrollo profesional de los docentes y formadores de docentes se destaca de la encuesta por necesitar una inversión seria. ¿Cómo pueden los maestros estar preparados para lo impredecible, tanto en términos de creencias como de acciones? Durante la pandemia, los docentes han estado bajo una enorme presión para tomar decisiones rápidas al rediseñar sus cursos, aprender a usar nuevas herramientas tecnológicas, inventar formas creativas de evaluación y hacer lo que estaba dentro de su capacidad para brindar oportunidades a sus estudiantes para aprender matemáticas, incluso si las herramientas tecnológicas eran limitadas (por ejemplo, si los estudiantes tenían poca o ninguna computadora o acceso a Internet en casa). La presión requirió tanto adaptación emocional como ajuste instruccional. Los profesores necesitaban rápidamente encontrar información útil, lo que plantea preguntas sobre la accesibilidad de los conocimientos de investigación. Dada la nueva situación, los recursos limitados y el desarrollo incierto de la educación después de los confinamientos, será necesario prestar mucha atención al desarrollo profesional de los docentes en temas necesarios y útiles. En particular, existe la necesidad de estudios longitudinales para investigar cómo el aprendizaje de los docentes afecta realmente la instrucción en el aula de los profesores y el aprendizaje de los estudiantes.

Los encuestados se refirieron principalmente a los maestros como maestros de matemáticas de escuelas K-12, pero algunos también destacaron la importancia de los formadores de maestros de matemáticas (MTE por sus siglas en inglés). Además de realizar investigaciones en educación matemática, los MTE están actuando tanto en el papel de formadores de docentes como de profesores de matemáticas. Ha habido una mayor investigación sobre las MTE que requieren desarrollo profesional (Goos y Beswick, 2021). Dentro del campo de la educación matemática, existe una necesidad e interés emergentes en cómo los propios formadores de profesores de matemáticas aprenden y se desarrollan. De hecho, la situación cambiante también brinda la oportunidad de examinar nuestras formas habituales de pensar y tomar conciencia de lo que Jullien (2018) llama el "no pensamiento": ¿Qué es lo que nosotros, como educadores e investigadores, no hemos visto o pensado tanto que la repentina reconfiguración de la educación nos obliga a reflexionar?

6.4 Uso de recursos de baja tecnología

Las líneas particulares de investigación se centran en herramientas innovadoras y sus aplicaciones en educación, incluso si en ese momento son demasiado caras (incluso demasiado intensivas en mano de obra) para usarlas a gran escala. Estos estudios orientados al futuro pueden ser muy interesantes dados los rápidos avances tecnológicos, y atractivos para los organismos de financiación centrados en la innovación. La tecnología digital se ha vuelto omnipresente, tanto en las escuelas como en la vida cotidiana, y ya hay un cuerpo significativo de trabajo que capitaliza aspectos de la tecnología para la investigación y la práctica en la educación matemática.

Sin embargo, como indicaron Cai *et al.* (2020), la tecnología avanza tan rápidamente que abordar los problemas de investigación puede no depender tanto del desarrollo de una nueva capacidad tecnológica como de ayudar a los investigadores y profesionales a aprender sobre nuevas tecnologías e imaginar formas efectivas de usarlas. Además, dados los millones de estudiantes en áreas rurales que durante la pandemia solo han tenido acceso a recursos de baja tecnología como podcasts, radio, televisión y quizás WhatsApp a través de los teléfonos de sus padres, nos gustaría ver más investigación sobre cómo se ve el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación de las matemáticas a través de herramientas limitadas como WhatsApp o WeChat y cómo se pueden mejorar. De hecho, en China, se ha desarrollado una serie de mini lecciones basadas en WeChat y se han impartido a través de la función de video WeChat durante la pandemia. Incluso cuando la pandemia está bajo control, las mini lecciones todavía se desarrollan y circulan a través de WeChat. Por lo tanto, creemos que es importante estudiar el uso y la influencia de los recursos de baja tecnología en la educación matemática.

6.5 Mantenerse en contacto en línea

Con la mayoría de los estudiantes aprendiendo en casa, un gran desafío continuo para todos ha sido cómo mantenerse en contacto entre sí y con las matemáticas. Con la interacción social, sin atención conjunta en el mismo espacio físico y al mismo tiempo, y con el colectivo solo mediado por la tecnología, convertirse y mantenerse motivado para aprender ha sido un desafío ampliamente sentido. En general, se espera que, en los niveles superiores de educación, se incorporen más elementos de aprendizaje combinado o a distancia en la educación. Se requiere una investigación cuidadosa sobre los aspectos afectivos, encarnados y colectivos del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas para superar eventualmente la distancia y la alienación tan ampliamente experimentadas en la educación en línea. Es decir, no solo necesitamos repensar las interacciones sociales entre estudiantes y/o maestros en diferentes entornos, sino que también debemos repensar cómo involucrar y motivar a los estudiantes en entornos en línea.

6.6 Estudiar y mejorar la equidad sin perpetuar la desigualdad

Varios colegas han advertido, hace tiempo, que un riesgo de estudiar las brechas de rendimiento, las diferencias entre los grupos mayoritarios y minoritarios, etc., es que puede, también, perpetuar la desigualdad. Es cierto que identificar la injusticia y la necesidad de invertir en partes particulares menos privilegiadas de la educación es necesario para redirigir la atención de los responsables políticos y los docentes y obtener financiación. Sin embargo, ¿cómo se pueden reorientar los recursos sin estigmatizar? Por ejemplo, Svensson *et al.* (2014) señalaron que los resultados de la investigación pueden alimentar debates políticos sobre grupos de personas (por ejemplo, padres con antecedentes migratorios), que luego pueden sentirse inseguros acerca de sus propias capacidades. Un desafío que vemos es identificar y comprender situaciones problemáticas sin legitimar estereotipos problemáticos (Hilt, 2015).

Además, el campo de la investigación en educación matemática no tiene una conceptualización consistente de la equidad. También parece haber diferencias regionales: nos llamó la atención que la equidad es el término más común en las respuestas de las Américas, mientras que la inclusión y la diversidad se mencionaron con mayor frecuencia en las respuestas europeas. Las investigaciones futuras deberán centrarse tanto en la conceptualización de la equidad como en la mejora de la equidad y los valores relacionados, como la inclusión.

6.7 Evaluación en línea

Un desafío clave es cómo evaluar en línea y hacerlo de manera más efectiva. Este desafío está relacionado con cuestiones de privacidad, ética y rendimiento. Está claro que la evaluación en línea puede tener ventajas significativas para evaluar el aprendizaje de matemáticas de los estudiantes, como una mayor flexibilidad en la toma de exámenes y una puntuación rápida. Sin embargo, algunos maestros se han enfrentado a problemas de privacidad, y también tenemos la impresión de que en un entorno en línea es aún más difícil evaluar con éxito lo que valoramos en lugar de simplemente evaluar lo que es relativamente fácil de evaluar. En particular, debemos investigar sistemáticamente cualquier posible efecto de la administración de evaluaciones en línea, ya que los investigadores han encontrado un efecto diferencial de esta frente a la evaluación en papel y lápiz (Backes y Cowan, 2019). Lo que además merece una cuidadosa atención ética es lo que sucede con los datos analíticos de aprendizaje que pueden y se recopilan cuando los estudiantes trabajan en línea.

6.8 Hacer y publicar investigaciones interdisciplinarias

Al analizar las respuestas, nos sorprendió una discrepancia entre lo que les importa a los encuestados y lo que normalmente se investiga y publica en nuestras revistas mono-disciplinarias. La mayoría de los desafíos mencionados en esta sección requieren enfoques interdisciplinarios o incluso transdisciplinarios (véase también Burkhardt, 2019).

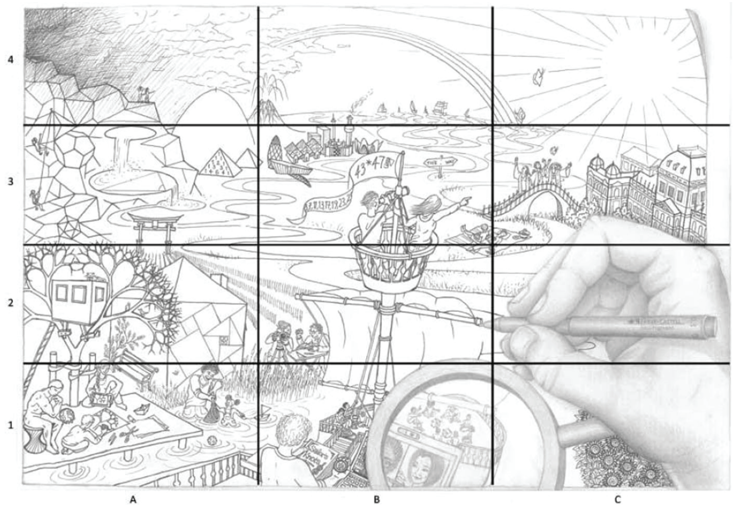
Una pregunta clave general es: ¿Qué papel juega la investigación en educación matemática para abordar los desafíos más grandes y generales mencionados por nuestros encuestados? La importancia de la interdisciplinariedad también plantea una pregunta sobre el alcance de las revistas que se centran en la investigación en educación matemática. ¿Necesitamos ampliar el alcance de las revistas mono-disciplinarias para que puedan publicar investigaciones importantes que combinen la investigación en educación matemática con otra perspectiva disciplinaria? Como editores, vemos un lugar para los estudios interdisciplinarios siempre y cuando haya un ancla fuerte en la investigación de la educación matemática. De hecho, hay estudiosos que no se identifican como investigadores de educación matemática pero que actualmente están haciendo un trabajo de alta calidad relacionado con la educación matemática en campos como la psicología educativa y las ciencias cognitivas y del aprendizaje. Alentar la presentación de informes de investigación de educación matemática de alta calidad de un espectro más amplio de investigadores serviría para aumentar el impacto de las revistas del tema en el ámbito educativo más amplio. Esto, a su vez, serviría para fomentar una mayor colaboración en torno a cuestiones de educación matemática de diversas disciplinas. En última instancia, las revistas de investigación en educación matemática podrían actuar como un centro de colaboración interdisciplinaria para abordar las preguntas apremiantes de cómo se aprenden y enseñan las matemáticas.

7. Observaciones finales

En este documento, basado en una encuesta realizada antes y durante la pandemia, hemos examinado cómo los académicos en el campo de la educación matemática ven el futuro de la investigación en educación matemática. Por un lado, no hay grandes sorpresas sobre las áreas en las que debemos centrarnos en el futuro; Los temas no son nuevos. Por otro lado, las respuestas también muestran que las áreas que hemos destacado aún persisten y necesitan más investigación (cf. OCDE, 2020). Pero, hay algunas áreas, basadas tanto en las respuestas de los académicos como en nuestras propias discusiones y puntos de vista, que se destacan por requerir más atención. Por ejemplo, esperamos que los resultados de esta encuesta sirvan para impulsar la conversación sobre la investigación en educación matemática con respecto a la evaluación en línea y las consideraciones pedagógicas para la enseñanza virtual.

Los resultados de la encuesta están limitados de dos maneras. El conjunto de encuestados probablemente no sea representativo de todos los investigadores de educación matemática en el mundo. En ese sentido, tal vez los académicos de cada país podrían usar las mismas preguntas de la encuesta para encuestar muestras representativas dentro de cada país para comprender cómo los académicos de ese país ven la investigación futura con respecto a las necesidades regionales. La segunda limitación está relacionada con el hecho de que la educación matemática es un campo muy dependiente culturalmente. Las diferencias culturales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas están bien documentadas. Dado el pequeño número de respuestas de algunos continentes, no desglosamos el análisis para la comparación regional. Muestras representativas de cada país nos ayudarían a ver cómo los académicos de diferentes países ven la investigación en educación matemática, agregarían otra capa de ideas sobre la investigación en educación matemática para complementar los resultados de la encuesta presentada aquí. Sin embargo, esperamos sinceramente que los resultados de las encuestas sirvan como punto de discusión para que el campo de la educación matemática busque la mejora continua.

Apéndice 1: Explicación de la figura 1



Hemos dividido la figura 1 de cada 12 rectángulos llamados A1 (abajo a la izquierda) hasta C4 (arriba a la derecha) para explicar los detalles (para la anotación de la imagen, vaya a https://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28937)

4	– Nubes oscuras: Afecto negativo – Parábola montaña	Arco iris: equidad, diversidad, inclusión Naves en la distancia Volcán Bell Curve	Sol: afecto positivo, fuente de energía
3	– Pirámides, una con el triángulo de Pascal – Lago elíptico con triángulo – Templo sintoísta parecido a Pi – Sólidos platónicos – Escaladores: ambición, curiosidad	– Gherkin (Londres) – Museo de ciencias NEMO (Ámsterdam) – Casas cubo (Rotterdam) – Incineración de residuos de Hundertwasser (Viena) – Los Manantiales restaurant (Mexico City) – El letrero “de esta manera” que señala dos direcciones significa el desafío para que los estudiantes encuentren su camino en la sociedad – Serie de números primos. 43*47 = 2021, el año en que Lizzy Angerer hizo este dibujo – Estudiantes en el nido del cuervo: interés, atención, anticipación, uso de la tecnología – La escena del picnic se refiere al video Powers of Ten (Eames y Eames, 1977)	– Puente con graduados felices con sus diplomas – Edificio de la Universidad de Viena que representa la educación superior

2	– Árbol fractal – Teorema de Pitágoras en la pared de la casa	– Dama con cámara y hombre midiendo, grabando y discutiendo: investigación y evaluación	La mano de dibujo representa el diseño (inspirado en la litografía de manos de dibujo de M. C. Escher de 1948)
1	Configuración del hogar: – El pensador de Rodin sentado en un taburete hiperboloide, reflexionando sobre cómo salvar el tierra – Niño dibujando el árbol fractal; Madre que brinda apoyo con una tableta que muestra el fractal – Barco plegado de papel – Tiras de Möbius como andamios para el árbol – Fútbol (esfera) – Ondas en el agua que conectan la escena del hogar con el barco de enseñanza	Entorno escolar: – Pequeño bote de juguete para niños en el río – Barco más grande con estudiantes y un profesor – Tecnología: brújula, ordenador portátil (educación a distancia) – La lupa representa la investigación sobre el aprendizaje en línea y fuera de línea – Estudiantes en círculo lanzando dados (aprendiendo sobre probabilidad) – Profesor con libro: autodesarrollo profesional	Girasoles que insinúan la secuencia de Fibonacci y la espiral de Fermat, y la cultura / arte (por ejemplo, Van Gogh)

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Anna Sfard por su consejo sobre la encuesta, basada en su propia encuesta publicada en Sfard (2005). Estamos agradecidos por la cuidadosa edición de Stephen Hwang para una versión anterior del manuscrito. Gracias también a Elisabeth Angerer, Elske de Waal, Paul Ernest, Vilma Mesa, Michelle Stephan, David Wagner y revisores anónimos por sus comentarios sobre borradores anteriores.

DECLARACIONES

De acuerdo con las directrices del Código de Ética de Publicación (COPE), observamos que el proceso de revisión de este artículo fue cegado a los autores.

REFERENCIAS

Akkerman, S. F., y Bakker, A. (2011). Boundary crossing and boundary objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132–169. https://doi.org/10.3102/0034654311404435

Arendt, H. (1958/1998). The human condition (2nd ed.). University of Chicago Press.

Backes, B., y Cowan, J. (2019). Is the pen mightier than the keyboard? The effect of online testing on measured student achievement. *Economics of Education Review, 68*, 89–103. https://doi.org/10.1016/j.econedurev. 2018.12.007

Bakkenes, I., Vermunt, J. D., y Wubbels, T. (2010). Teacher learning in the context of educational innovation: Learning activities and learning outcomes of experienced teachers. *Learning and Instruction, 20*(6), 533–548. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.09.001

Bakker, A. (2019). What is worth publishing? A response to Niss. *For the Learning of Mathematics, 39*(3), 43–45.

Bakker, A., y Gravemeijer, K. P. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62*(2), 149–168. https://doi.org/10.1007/s10649-006-7099-8

Bakx, A., Bakker, A., Koopman, M., y Beijaard, D. (2016). Boundary crossing by science teacher researchers in a PhD program. *Teaching and Teacher Education, 60*, 76–87. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.08.003

Battey, D. (2013). Access to mathematics: "A possessive investment in whiteness". *Curriculum Inquiry, 43*(3), 332–359.

Bawa, P. (2020). Learning in the age of SARS-COV-2: A quantitative study of learners' performance in the age of emergency remote teaching. *Computers and Education Open, 1*, 100016. https://doi.org/10.1016/j.caeo. 2020.100016

Beckers, D., y Beckers, A. (2019). 'Newton was heel exact wetenschappelijk – ook in zijn chemische werk'. Nederlandse wetenschapsgeschiedenis in niet-wetenschapshistorische tijdschriften, 1977–2017. *Studium, 12*(4), 185–197. https://doi.org/10.18352/studium.10203

Bessot, A., y Ridgway, J. (Eds.). (2000). *Education for mathematics in the workplace*. Springer.

Bickerton, R. T., y Sangwin, C. (2020). Practical online assessment of mathematical proof. arXiv preprint: 2006.01581. https://arxiv.org/pdf/2006.01581.pdf.

Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer.

Bini, G., Robutti, O., y Bikner-Ahsbahs, A. (2020). Maths in the time of social media: Conceptualizing the Internet phenomenon of mathematical memes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–40. https://doi.org/10.1080/0020739x.2020.1807069

Bosch, M., Dreyfus, T., Primi, C., y Shiel, G. (2017, February). Solid findings in mathematics education: What are they and what are they good for? CERME 10. Ireland: Dublin https://hal./hal01849607

Bowker, G. C., y Star, S. L. (2000). *Sorting things out: Classification and its consequences.* MIT Press. https:// doi.org/10.7551/mitpress/6352.001.0001

Burkhardt, H. (2019). Improving policy and practice. *Educational Designer, 3*(12) http://www. educationaldesigner.org/ed/volume3/issue12/article46/

Cai, J., y Hwang, S. (2019). Constructing and employing theoretical frameworks in (mathematics) education research. *For the Learning of Mathematics, 39*(3), 44–47.

Cai, J., y Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and U.S. elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(8), 1521–1540. https://doi.org/ 10.1007/s10763-016-9758-2

Cai, J., y Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 287–301. https://doi.org/10.1007/s10649020-10008-x

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., ... Hiebert, J. (2020). Improving the impact of research on practice: Capitalizing on technological advances for research. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 518–529 https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/51/5/article-p518.xml

Chronaki, A. (2019). Affective bodying of mathematics, children and difference: Choreographing 'sad affects' as affirmative politics in early mathematics teacher education. *ZDM-Mathematics Education, 51*(2), 319–330. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01045-9

Civil, M., y Bernier, E. (2006). Exploring images of parental participation in mathematics education: Challenges and possibilities. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(3), 309–330. https://doi.org/10.1207/ s15327833mtl0803_6

Cobb, P., Gresalfi, M., y Hodge, L. L. (2009). An interpretive scheme for analyzing the identities that students develop in mathematics classrooms. J*ournal for Research in Mathematics Education, 40*(1), 40–68 https:// pubs.nctm.org/view/journals/jrme/40/1/article-p40.xml

Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 19–33. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9696-5 de Abreu, G., Bishop, A., y Presmeg, N. C. (Eds.). (2006). T*ransitions between contexts of mathematical practices*. Kluwer.

de Freitas, E., Ferrara, F., y Ferrari, G. (2019). The coordinated movements of collaborative mathematical tasks: The role of affect in transindividual sympathy. *ZDM-Mathematics Education, 51*(2), 305–318. https://doi. org/10.1007/s11858-018-1007-4

Deng, Z. (2018). Contemporary curriculum theorizing: Crisis and resolution. *Journal of Curriculum Studies, 50*(6), 691–710. https://doi.org/10.1080/00220272.2018.1537376

Dobie, T. E., y Sherin, B. (2021). The language of mathematics teaching: A text mining approach to explore the zeitgeist of US mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 107, 159-188. https://doi.org/10.1007/s10649020-10019-8

Eames, C., y Eames, R. (1977). Powers of Ten [Film]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=-0fKBhvDjuy0

Engelbrecht, J., Borba, M. C., Llinares, S., y Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed? *ZDM-Mathematics Education, 52*(5), 821–824. https://doi. org/10.1007/s11858020-01185-3

English, L. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 3–19). Routledge.

Ernest, P. (2020). Unpicking the meaning of the deceptive mathematics behind the COVID alert levels. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 36* http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/ centres/stem/publications/pmej/pome36/index.html

Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Springer.

Gilmore, C., Göbel, S. M., y Inglis, M. (2018). *An introduction to mathematical cognition.* Routledge.

Goos, M., y Beswick, K. (Eds.). (2021). *The learning and development of mathematics teacher educators: International perspectives and challenges*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8

Gorard, S. (Ed.). (2020). *Getting evidence into education. Evaluating the routes to policy and practice*. Routledge.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L., y Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 105– 123. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Hannula, M. S. (2019). Young learners' mathematics-related affect: A commentary on concepts, methods, and developmental trends. *Educational Studies in Mathematics, 100*(3), 309–316. https://doi.org/10.1007/ s10649-018-9865-9

Hilt, L. T. (2015). Included as excluded and excluded as included: Minority language pupils in Norwegian inclusion policy. *International Journal of Inclusive Education, 19*(2), 165–182.

Hodgen, J., Taylor, B., Jacques, L., Tereshchenko, A., Kwok, R., y Cockerill, M. (2020). Remote mathematics teaching during COVID-19: Intentions, practices and equity. UCL Institute of Education https://discovery.ucl.ac.uk/id/eprint/10110311/

Horn, I. S. (2017). *Motivated: Designing math classrooms where students want to join in*. Heinemann.

Hoyles, C., Noss, R., y Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(1), 4–27. https://doi.org/10.2307/749619

Ito, M., Martin, C., Pfister, R. C., Rafalow, M. H., Salen, K., y Wortman, A. (2018). *Affinity online: How connection and shared interest fuel learning*. NYU Press.

Jackson, K. (2011). Approaching participation in school-based mathematics as a cross-setting phenomenon. *The Journal of the Learning Sciences, 20*(1), 111–150. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.528319

Jansen, A., Herbel-Eisenmann, B., y Smith III, J. P. (2012). Detecting students' experiences of discontinuities between middle school and high school mathematics programs: Learning during boundary crossing. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(4), 285–309. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.717379

Johnson, L. F., Smith, R. S., Smythe, J. T., y Varon, R. K. (2009). Challenge-based learning: An approach for our time (pp. 1–38). The New Media Consortium https://www.learntechlib.org/p/182083

Jullien, F. (2018). Living off landscape: Or the unthought-of in reason. Rowman y Littlefield.

Kazima, M. (2019). What is proven to work in successful countries should be implemented in other countries: The case of Malawi and Zambia. En M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 73–78). PME.

Kim, H. (2019). Ask again, "why should we implement what works in successful countries?" En M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 79–82). PME.

Kolovou, A., Van Den Heuvel-Panhuizen, M., y Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks-a needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 8*(2), 29–66.

Kwon, O. N., Han, C., Lee, C., Lee, K., Kim, K., Jo, G., y Yoon, G. (2021). Graphs in the COVID-19 news: A mathematics audit of newspapers in Korea. *Educational Studies in Mathematics*, 108, 183-200. https://doi.org/10.1007/ s10649-021-10029-0

Lefebvre, H. (2004). *Rhythmanalysis: Space, time and everyday life* (Original 1992; Translation by S. Elden y G. Moore). Bloomsbury Academic. https://doi.org/10.5040/9781472547385.

Li, Y. (2019). Should what works in successful countries be implemented in other countries? En M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 67–72). PME.

Martin, D., Gholson, M., y Leonard, J. (2010). Mathematics as gatekeeper: Power and privilege in the production of power. *Journal of Urban Mathematics Education, 3*(2), 12–24.

Masschelein, J., y Simons, M. (2019). Bringing more 'school' into our educational institutions. Reclaiming school as pedagogic form. En A. Bikner-Ahsbahs y M. Peters (Eds.), *Unterrichtsentwicklung macht Schule* (pp. 11–26). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-20487-7_2

Meeter, M., Bele, T., den Hartogh, C., Bakker, T., de Vries, R. E., y Plak, S. (2020). College students' motivation and study results after COVID-19 stay-at-home orders. https://psyarxiv.com.

Nemirovsky, R., Kelton, M. L., y Civil, M. (2017). Toward a vibrant and socially significant informal mathematics education. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 968– 979). National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. (2019). The very multi-faceted nature of mathematics education research. *For the Learning of Mathematics, 39*(2), 2–7.

OECD. (2020). Back to the Future of Education: Four OECD Scenarios for Schooling. Educational Research and Innovation. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/20769679

Potari, D., Psycharis, G., Sakonidis, C., y Zachariades, T. (2019). Collaborative design of a reform-oriented mathematics curriculum: Contradictions and boundaries across teaching, research, and policy. *Educational Studies in Mathematics, 102*(3), 417–434. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9834-3

Proulx, J., y Maheux, J. F. (2019). Effect sizes, epistemological issues, and identity of mathematics education research: A commentary on editorial 102(1). *Educational Studies in Mathematics, 102*(2), 299–302. https:// doi.org/10.1007/s10649-019-09913-7

Roos, H. (2019). Inclusion in mathematics education: An ideology, A way of teaching, or both? *Educational Studies in Mathematics, 100*(1), 25–41. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9854-z

Saenz, M., Medina, A., y Urbine Holguin, B. (2020). Colombia: La prender al onda (to turn on the wave). Education continuity stories series. OECD Publishing https://oecdedutoday.com/wp-content/uploads/2020/ 12/Colombia-a-prender-la-onda.pdf

Schindler, M., y Bakker, A. (2020). Affective field during collaborative problem posing and problem solving: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 303–324. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09973-0

Schoenfeld, A. H. (1999). Looking toward the 21st century: Challenges of educational theory and practice. *Educational Researcher, 28*(7), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189x028007004

Schukajlow, S., Rakoczy, K., y Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM-Mathematics Education, 49*(3), 307–322. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0864-6

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 393–413. https://doi.org/10.1007/s10649-005-4818-5

Shimizu, Y., y Vithal, R. (Eds.). (2019). ICMI Study 24 Conference Proceedings. School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities. ICMI: University of Tsukuba y ICMI http:// www.human.tsukuba.ac.jp/~icmi24/

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24–41.

Stephan, M. L., Chval, K. B., Wanko, J. J., Civil, M., Fish, M. C., Herbel-Eisenmann, B., ... Wilkerson, T. L. (2015). Grand challenges and opportunities in mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(2), 134–146. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.2.0134

Suazo-Flores, E., Alyami, H., Walker, W. S., Aqazade, M., y Kastberg, S. E. (2021). A call for exploring mathematics education researchers' interdisciplinary research practices. *Mathematics Education Research Journal*, 1–10. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00371-0

Svensson, P., Meaney, T., y Norén, E. (2014). Immigrant students' perceptions of their possibilities to learn mathematics: The case of homework. *For the Learning of Mathematics, 34*(3), 32–37.

UNESCO. (2015). Teacher policy development guide. UNESCO, International Task Force on Teachers for Education 2030. https://teachertaskforce.org/sites/default/files/2020-09/370966eng_0_1.pdf.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education? *Cambridge Journal of Education, 35*(1), 35–53. https://doi.org/10.1080/0305764042000332489

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355–374.

Yoon, H., Byerley, C. O. N., Joshua, S., Moore, K., Park, M. S., Musgrave, S., Valaas, L., y Drimalla, J. (2021). United States and South Korean citizens' interpretation and assessment of COVID-19 quantitative data. *The Journal of Mathematical Behavior, 62,* 100865. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100865.

Autor de correspondencia

Arthur Bakker

Dirección: A.Bakker4@uu.nl, Utrecht University, Utrecht, Netherlands

 https://doi.org/10.24844/EM3502.02

El papel de los juicios de valor en la ciencia didáctica. Diálogo entre la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque ontosemiótico en educación matemática

The role of value judgements in didactics. Dialogue between the Anthropological Theory of Didactic and the Ontosemiotic Approach in mathematics education

Josep Gascón,[1] Pedro Nicolás[2]

Resumen: Este trabajo es una respuesta al artículo (Godino, 2023), y supone una continuación de un diálogo entre diferentes enfoques en didáctica de las matemáticas iniciado en (Gascón y Nicolás, 2017). Aquí abordamos en profundidad la siguiente cuestión: ¿pueden ser los juicios de valor presentados como resultados de la investigación científica? Para ello, vinculamos esta pregunta con una clásica tesis de Max Weber, y analizamos algunas tesis supuestamente incompatibles con la tesis de Weber. A continuación, argumentamos a favor del carácter no normativo de la ciencia didáctica, y criticamos el papel que se asigna a los criterios de idoneidad didáctica en el Enfoque Ontosemiótico. Terminamos contraponiendo los límites de la ciencia (en particular, la didáctica) con su enorme poder transformador (en particular, de la práctica docente).

Fecha de recepción: 15 de diciembre de 2022. **Fecha de aceptación:** 10 de mayo de 2023.

[1] Campus de la Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Biociencias, josepgasconperez@gmail.com, orcid.org/0000-0001-5570-1144.

[2] Campus Universitario de Espinardo, Universidad de Murcia, Facultad de Educación, pedronz@um.es, orcid.org/0000-0002-6757-9155

Palabras clave: *juicios de valor, normatividad, actividad científica, criterio de idoneidad, práctica docente, límites de la ciencia*

Abstract: This work is an answer to the paper (Godino, 2023), and it contributes to a dialogue between different approaches in mathematics education started with (Gascón y Nicolás, 2017). Here we address in depth the following question: can value judgement be presented as results of scientific research? For this, we link this question with a classical thesis by Max Weber, and we analyse some theses allegedly incompatible with that of Weber. Next, we defend the non-normative character of didactics as a scientific activity, and we question the role attributed to the didactic suitability criteria of the Ontosemiotic Approach. Finally, we contrast the limits of science (in particular, didactics) with the great transformative power (in particular, of the teaching practice).

Keywords: *value judgements, normativity, scientific activity, suitability criterion, teaching practice, limits of science*

1. CONTEXTO HISTÓRICO DEL DIÁLOGO ENTRE TEORÍAS DIDÁCTICAS

Este trabajo se sitúa en el contexto de un diálogo entre teorías didácticas cuyos orígenes se remontan al año 2013 con la pregunta que planteamos a Guy Brousseau sobre el presunto carácter *normativo* o *prescriptivo* de la ciencia didáctica. Esta pregunta constituye el núcleo de la primera etapa del diálogo. Posteriormente, extendimos la pregunta a un amplio conjunto de colegas.[3] Sus respuestas fueron publicadas en la lengua original y en inglés en (Gascón y Nicolás, 2017) y la nuestra en (Gascón y Nicolás, 2016/2019; 2018).

El diálogo se desarrolló, posteriormente, incluyendo nuevas cuestiones relativas a los postulados o *asunciones básicas* de cada teoría, a los *fines* que persigue la investigación didáctica y a los *resultados* que cada teoría considera admisibles. En torno a estas cuestiones tuvo lugar una segunda etapa del diálogo plasmada en diversos artículos (Lerman, 2018; Proulx, 2018; Bartolini Bussi,

[3] Los participantes en esta etapa inicial del diálogo fueron: Guy Brousseau (TSD), Michèle Artigue (Contraste entre diversas teorías), Ed Dubinsky (APOS), María Trigueros (APOS), Juan D. Godino (EOS), Koeno Gravemeijer (Educación Matemática Realista), Ricardo Cantoral (TSME) y Josep Gascón y Pedro Nicolás (TAD).

2018; Davis, 2018; Oktaç, Trigueros y Romo, 2019; Godino, Batanero y Font, 2019; Staats y Laster, 2019; Gascón y Nicolás 2019a, 2019b), etapa que culminó en un curso organizado por el Centre de Recerca Matemàtica (Barcelona), entre los días 3 y 14 de junio de 2019, como parte de un Intensive Research Program (Chevallard *et al.*, 2022).

Entre las cuestiones que quedaron abiertas destacamos las que se refieren a las relaciones entre la investigación didáctica y la práctica educativa (que están muy relacionadas con el supuesto carácter normativo de la ciencia didáctica). Con el objetivo de abordar estas cuestiones, convocamos en (Gascón y Nicolás, 2021a) la tercera etapa del diálogo señalando la necesidad de explicitar los *fines educativos* (de la educación matemática) y los *modelos epistemológicos* (de las matemáticas) *asumidos* por cada una de las teorías o enfoques en didáctica de las matemáticas.

Para lanzar la discusión, formulamos un conjunto de cuestiones relativas a lo que se entiende por "resultado de la investigación didáctica", por "aplicación"o "implementación" de los resultados de la investigación a la acción didáctica y, en definitiva, lo que cada teoría didáctica entiende por "mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas". En (Gascón y Nicolas, 2021a y 2021b) propusimos una primera respuesta a estas cuestiones desde la perspectiva que proporciona la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD).

Recientemente, Juan Diaz Godino ha retomado el diálogo entre la TAD y el Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática (EOS) (Godino, 2023), volviendo a abundar en su punto de vista ya expresado en (Gascón y Nicolás, 2017) sobre la problemática de la normatividad y sobre el papel que desempeñan los *juicios de valor* en didáctica de las matemáticas y en otras ciencias. Paralelamente cuestiona y critica la forma como la TAD ha construido y utiliza las nociones de 'praxeología' y 'paradigma didáctico'.

Ahora nos centraremos en el problema del papel que desempeñan los valores y los juicios de valor en las disciplinas científicas y, en particular, en la ciencia didáctica. Pretendemos volver a precisar nuestra tesis relativa al *carácter no normativo de la didáctica*. Para ello: empezaremos por formular el problema con precisión (sección 2); expondremos con cierto detalle la tesis de Max Weber para clarificar algunos de los malentendidos que sufrió en su momento, y que sigue sufriendo, mostrando que muchos de los argumentos que se esgrimen en su contra se basan en tergiversaciones que ya fueron rechazadas en su día por el propio autor (sección 3); mostraremos que algunas de las tesis supuestamente contrarias a la de Weber son, en realidad, perfectamente compatibles con ella (sección 4); explicitaremos, con ejemplos concretos, nuestra tesis sobre el carácter transformativo, no normativo, de la ciencia didáctica (sección 5); discutiremos abiertamente la respuesta que propone el EOS a la cuestión de la normatividad y, en particular, criticaremos el papel que este enfoque asigna a los *criterios de idoneidad didáctica* (sección 6). Finalmente, a modo de conclusión, mostraremos en qué sentido las relaciones entre la investigación didáctica y la práctica docente están condicionadas por los límites de la ciencia (sección 7).

Dejaremos para un trabajo posterior la discusión sobre la forma como se conceptualizan y como se utilizan las nociones de 'praxeología', 'praxeología de investigación (didáctica)' y 'paradigma didáctico' en el ámbito de la TAD en el que han surgido.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En (Godino, 2023) se presenta el problema del papel que desempeñan los valores y los juicios de valor en la ciencia en términos de una contraposición entre dos posturas antagónicas: ¿deben excluirse por completo de la investigación científica o, por el contrario, desempeñan un papel importante tanto en las ciencias sociales como en las ciencias naturales? En nuestra opinión, este no es el planteamiento correcto del problema porque es obvio que los valores y los juicios de valor intervienen en todas las etapas de la actividad científica, tanto en las ciencias sociales como en las naturales. En este punto no hay nada que discutir.

Empezaremos por recordar que, lejos de negar la *presencia* y la *incidencia* de los valores de todo tipo en la actividad científica, afirmábamos claramente lo contrario en la primera etapa del diálogo:

> Every human activity taking place in society (in particular, scientific activity) is conditioned by several systems of values and regulated by more or less explicit norms. Concerning scientific activity, one could distinguish between *epistemic* and *non-epistemic* values. Epistemic values are linked to the standards of scientific truth: objectivity, internal coherence, compatibility with other accepted theories, predictive power, etc. Among those non-epistemic values affecting scientific activity might be social utility, social cost, accessibility, etc. Epistemic and non-epistemic values, and the corresponding rules derived from them, affect scientific activity as a whole. They have an effect at different moments of this activity, including the choice of research problems, the selection of empirical data and their treatment, the formulation of scientific results and their interpretation, dissemination, and use. (Gascón y Nicolás, 2017, p. 9)

Además, en el caso de las ciencias sociales y, en particular, en el caso de la didáctica, es posible constatar un fuerte impacto de determinados valores no epistémicos.

> According to Bourdieu (2001), social sciences are strongly exposed to non-epistemic values because their object of study is too important, from the point of view of social and symbolic order, to allow for autonomous development. Some of the features described by Bourdieu for the whole family of social sciences are particularly present in the case of didactics. For instance, the influence of heteronomous verdicts is very strong, especially the demand of social usefulness and the obedience to the dictates of the predominant pedagogical ideology (Gascón y Nicolás, 2017, p. 9).

Lo que se discute es, por tanto, un poco más complejo. Puede formularse, en primera instancia, como sigue: ¿*qué papel pueden desempeñar legítimamente los valores y los juicios de valor en las ciencias sociales y qué papel no están legitimados a desempeñar*?

Para abordar esta cuestión es necesario distinguir, en primer lugar, entre los juicios de valor y los valores. Los *juicios de valor* son los juicios basados en un conjunto particular (personal o general) de creencias, de formas de vida o de valores. Mientras que un *valor*, según la Real Academia Española, es una cualidad que poseen algunas realidades, consideradas bienes, por lo cual son estimables. Los valores tienen *polaridad* en cuanto son considerados positivos o negativos, y *jerarquía* (pueden ser considerados superiores o inferiores).

3. LA TESIS DE MAX WEBER

Ante todo, mostraremos que la tesis de Max Weber no pretende eliminar en absoluto los juicios de valor en la actividad científica. Ciertamente Weber afirma en diversas ocasiones que "las ciencias sociales deben abstenerse de *emitir* juicios de valor", pero el significado preciso de dicha afirmación debe interpretarse en el contexto de su obra. De hecho, y tal como mostraremos a continuación, la tesis de Weber no implica en absoluto que los valores y los juicios de valor no puedan o no deban desempeñar ningún papel en las ciencias sociales. Lejos de considerar que deben eliminarse, Weber analiza cuidadosamente sus funciones en la actividad científica intentando clarificar el papel que pueden desempeñar legítimamente y asignándoles una importancia capital (Weber, 2010).

En realidad, la afirmación de que la ciencia no puede hacer juicios de valor –que es la que ha centrado la atención de sus críticos– es una consecuencia lógica de una importante tesis de carácter metodológico[4] que puede formularse brevemente como sigue: las ciencias sociales solo pueden formular enunciados sobre los *medios racionalmente adecuados* para conseguir *fines previamente determinados* pero cuya validez (la de los fines) no puede ser establecida racionalmente.[5] Lo único que es susceptible de tratamiento científico es la pregunta por la idoneidad de los medios para conseguir un fin dado. Desde la ciencia solo podemos establecer qué medios son adecuados para el fin propuesto y las consecuencias queridas y no queridas de una acción (es decir, los fines queridos y no queridos que es previsible obtener cuando se aplican determinados medios).

> Solo cuando nos preguntamos por los medios adecuados para un fin determinado de manera absolutamente inequívoca estamos ante una cuestión resoluble empíricamente. La proposición «*x* es el único medio para *y*» es, en realidad, una mera inversión de la proposición «*y* es efecto de *x*» (Weber, 2010, p. 121)
> La teoría económica no puede decir nada más que esto: para un fin dado x, el único medio apropiado es y, aisladamente o junto con y^1 e y^2; y que, en este último caso, existen tales y tales diferencias en cuanto a los efectos de estos medios y –en su caso– en cuanto a su racionalidad; y que la utilización de esos medios y, por tanto, la consecución del fin x obliga a contar con los «resultados colaterales» *z*, z^1 y z^2. (Weber, 2010, p. 144)

En consecuencia, las ciencias sociales no están legitimadas para formular (o emitir) juicios de valor *como resultados de la investigación* y, por tanto, no pueden pretender justificarlos utilizando criterios lógicos, empíricos, éticos, culturales o de otro tipo. Podemos extender esta conclusión a todas las ciencias. Así, por ejemplo, la tesis de Weber comporta que la *ciencia económica* no está

---

[4] En la metodología que propone Max Weber para las ciencias sociales, la relación de causa-efecto, interpretada como relación necesaria, es substituida por una relación de condicionamiento medios-fines que puede describirse como sigue: las ciencias histórico-sociales no establecen los factores determinantes de un fenómeno, sino que estipulan un cierto grupo de condiciones (de medios) que, junto con otras, facilitan su ocurrencia (Weber, 1973).

[5] La primera condición de la conducta racional consiste en la exploración, aclaración y explicitación de los fines perseguidos. Por otra parte, mientras que los fines intermedios son justificables en función de los fines últimos, estos pueden ser explorados y explicitados, pero, en último término, no pueden ser justificados racionalmente (Mosterín, 2008).

legitimada para decidir cómo *deben* distribuirse los bienes materiales en las sociedades humanas; la *ciencia social* no puede decidir cuál es la *mejor* estructura (social y política) de las sociedades; la *física nuclear* no está legitimada para decidir qué uso *debe* darse a la energía nuclear y la *ciencia médica* no puede decidir qué trato se *debe* procurar a los enfermos terminales.

¿Significa esto que las ciencias histórico-sociales no tienen nada que decir con relación a los valores y los juicios de valor? En absoluto. Weber afirma que, aunque estas no tengan legitimidad para pronunciarse acerca de la validez normativa de los valores, pueden establecer su existencia empírica y elucidar las condiciones y las consecuencias de su realización. Las ciencias sociales están legitimadas, por consiguiente, para realizar una crítica de los valores mediante un análisis de los medios y, por lo tanto, de las condiciones de realización del valor adoptado como fin. Dicha crítica no puede afirmar que un valor sea *estimable* (o *deseable*) y otro no lo sea, pero puede establecer que determinados medios son apropiados o inapropiados para alcanzar cierto fin o que determinadas condiciones facilitan o dificultan su realización.

Además, y este es un punto central en la metodología de las ciencias sociales que propone Weber, los *valores culturales establecidos* (compartidos en un contexto social e histórico determinado), la religión, la iglesia, el derecho, el estado, las costumbres, la ciencia, la lengua, la literatura, el arte, la economía, etc., son los que condicionan el objeto de estudio de las ciencias culturales.

> Los problemas que se plantean en las disciplinas empíricas han de ser respondidos ciertamente sin hacer «juicios de valor», pues no son «problemas de valoración»; pero en nuestras disciplinas el planteamiento de los problemas se encuentra bajo la influencia de la relación de la realidad con los valores. [...] quien le señala al trabajo científico-empírico su *dirección* es la perspectiva cultural, es decir, la perspectiva de los *valores*. (Weber, 2010, pp. 109-110)

Queda así claro que la exigencia que plantea Weber a las ciencias sociales se refiere únicamente a abstenerse de emitir "juicios de valor" como resultados de la investigación y de pretender justificarlos racionalmente. Por el contrario, el análisis científico de los "juicios de valor" constituye una tarea importante para las ciencias sociales y los "valores" desempeñan una función metodológica que es esencial en la delimitación y selección del objeto de investigación. De hecho, en la metodología de Weber, los valores de la cultura (dominantes en una época) son el punto de referencia en la construcción de los fenómenos sociales. El investigador debe poner en relación los "fenómenos de la vida social" con los valores de la cultura de carácter general, a fin de destacar los aspectos significativos de dichos fenómenos. Esta función metodológica de los valores no comporta en absoluto que el investigador afirme estos valores, sino que, por el contrario, este debe distanciarse personalmente de los mismos con los que pone en relación su objeto de estudio. En (Weber, 2001) se ejemplifica magistralmente este distanciamiento en el caso de los valores de la *ética protestante* para relacionarla con el *espíritu del capitalismo* y poner así de manifiesto los rasgos significativos de este fenómeno.

Una de las críticas a la tesis de Weber se basa precisamente en que la ciencia quiere obtener resultados "valiosos" y que, además, la elección de la materia de investigación y el tipo de problemas a investigar contiene ya un "juicio de valor". Para Weber estas objeciones no son serias puesto que su formulación pone de manifiesto una clara incomprensión de su tesis.[6] Otra de las críticas más comunes alude a la existencia de juicios de valor compartidos culturalmente, pretendidamente "objetivos", en contraposición a los juicios de valor "subjetivos". En réplica al economista Gustav von Schmoller (1838-1917), Weber insiste en que esta crítica *no tiene relevancia para el asunto*:

> La suposición de Schmoller de que cada vez es mayor el acuerdo de todos los hombres y todas las confesiones religiosas sobre los puntos principales de los juicios de valor se opone radicalmente a la impresión contraria que yo tengo. Pero esto no tiene relevancia para el asunto, pues lo que hay que discutir en todo caso sería si nos podemos contentar científicamente con el hecho de que ciertos juicios de valor tan extendidos tengan una evidencia fáctica alcanzada convencionalmente. La función específica de la ciencia me parece que es precisamente la inversa: convertir en problema algo convencionalmente evidente. (Weber, 2001, pp. 90-91)

La tesis de Weber hace referencia, en última instancia, a la metodología de investigación de las ciencias sociales y, en particular, a lo que puede aceptarse racionalmente como "resultado de la investigación en las ciencias sociales". Curiosamente esta tesis metodológica ha sido muy poco criticada a pesar de

[6] Esta incomprensión se repitió en diversos congresos y reuniones en las que Weber expuso su tesis. En los dos primeros congresos de la Sociedad Alemana de Sociología –en 1910 y 1912– los debates que tuvieron lugar al respecto desilusionaron a Weber hasta el punto de que en 1913 abandonó la Sociedad. En 1914 discutió estas cuestiones en una reunión celebrada en Berlín y, después de reprochar a los asistentes que no habían entendido lo que él estaba diciendo, abandonó la reunión.

que implica lógicamente que las ciencias sociales no pueden emitir juicios de valor, ni pretender fundamentarlos racional o empíricamente.

Otra consecuencia lógica de la citada tesis metodológica de Weber es la separación entre dos esferas de la realidad que se ocupan de preguntas de diferente naturaleza:

a) La esfera del conocimiento: ¿*cómo* se comporta una realidad determinada?, ¿*por qué* esa realidad ha llegado a ser como es?, ¿*qué condiciones* se requieren para que se modifique en una dirección determinada?
b) La esfera de los valores: ¿qué *debemos hacer* en una situación concreta?, ¿cómo *valoramos* esa situación?, ¿*debemos hacer* algo para que esa situación se desarrolle en una dirección determinada y, en este caso, en qué dirección?

Mientras que las cuestiones pertenecientes a la esfera del conocimiento pueden ser tratadas por los procedimientos de las ciencias sociales, no existe ni es concebible que pueda existir ningún procedimiento científico, racional o empírico que pudiese suministrarnos una respuesta para las cuestiones pertenecientes a la esfera de los valores.

4. TESIS SUPUESTAMENTE INCOMPATIBLES CON LA TESIS DE WEBER

La tesis de Weber, interpretada correctamente, no se contradice, en lo esencial, con muchas de las posiciones que suelen presentarse como incompatibles con ella. Veamos, a título de ejemplo, las cuatro que se presentan en (Godino, 2023) como supuestamente contrarias a la tesis de Weber.

> (1) Los científicos emiten y se apoyan en juicios de valor que están esencialmente implicados en los procedimientos de la ciencia. Esto es así porque el científico acepta o rechaza hipótesis y ninguna hipótesis se verifica por completo, por lo que debe decidir qué hipótesis aceptar o rechazar sin una seguridad absoluta. (Rudner, 1953)

Obviamente, los científicos se apoyan en juicios de valor para tomar decisiones de todo tipo y, en particular, la aceptación de una hipótesis científica en lugar de otra es una decisión que requiere utilizar juicios de valor. Esto *no implica que los* *juicios de valor puedan establecerse como resultados de la propia investigación científica*. De hecho, entre las decisiones más radicales que se toman en la actividad científica están las de elegir en qué marco teórico se trabajará, qué objetos y qué relaciones poblarán el universo (su ontología), qué constructos teóricos se utilizarán y qué postulados se asumirán provisionalmente.

En el caso de la investigación didáctica, se debe decidir, entre otras cosas, el *modelo epistemológico* de las matemáticas que se asume y los *fines educativos* que se propugnan (aunque sea provisionalmente). No parece que los juicios de valor que sustentan estas decisiones puedan obtenerse ni justificarse, en ningún caso, apelando a resultados de la investigación científica. En consecuencia, la ciencia no puede ahorrarle al investigador la elección que comporta cada una de estas decisiones.

> (2) Hay momentos en las prácticas de investigación en los que los valores pueden desempeñar un papel legítimo y a veces indispensable y, por tanto, debe rechazarse la tesis según la cual los juicios de valor y las declaraciones cargadas de valores deben excluirse por completo de la investigación científica. (Lacey, 2003)

Como hemos mostrado, la tesis de Weber es completamente coherente con lo que se afirma en (2): los juicios de valor no deben excluirse de la investigación científica puesto que, como subraya el propio Weber, el análisis científico de los juicios de valor forma parte de la actividad científica y, en las ciencias sociales, los valores guían la construcción del objeto de investigación.

> (3) Incluso en las ciencias naturales son inevitables los valores y los juicios de valor. Si bien no hay lugar en la ciencia para los valores y los juicios de valor personales y subjetivos, sí que hay espacio para los valores y juicios de valor sociales y objetivos con el requisito de que se apoyen en una prueba lógica y/o empírica. (Rugina, 1998)

Y para apoyar la afirmación anterior, propone el siguiente enunciado como ejemplo de "juicio de valor racional o fundamentado", y por tanto compartible para una comunidad:

Si unas circunstancias son similares a C, se aceptan los principios P y se quiere conseguir el fin F, entonces se deben aplicar los medios M para obtener los mejores resultados.

Pero resulta que este enunciado coincide esencialmente con el principio metodológico de Weber, de hecho, podría haber sido escrito por el mismo Weber. En realidad, dicho enunciado no emite ningún juicio de valor (ni "subjetivo" ni "social y objetivo") porque, aunque habla de los "mejores resultados", se refiere a los resultados tan cercanos como sea posible al fin F, previamente determinado y en ningún momento se asigna al fin F un valor superior a otros fines posibles (lo que sí comportaría un juicio de valor). Lo que se afirma en dicho enunciado es que, en determinadas circunstancias, aceptando los principios P, los medios M son (los más) adecuados para obtener el fin F. Lo único que falta es *explicitar* que ni los principios P, ni el fin F, pueden ser considerados *resultados de la investigación*, son postulados.

(4) Bunge (1998) sostiene que el objetivo de la tecnología es esencialmente diferente del de la ciencia básica y que, para las sociotecnologías, como es el caso de la educación, es consustancial el paso del *es* al *debería* y, por tanto, están impregnadas de valores.

> Cuando todos los miembros de un grupo muy numeroso aprecian lo mismo en una situación similar, se puede hablar de valores impersonales y universales, como la salud y la alimentación, la convivencia y la solidaridad, la verdad y la eficacia, etc. (Bunge, 2016, p. 381)

La constatación de Bunge de que la educación (y, por extensión, la investigación educativa) está impregnada de valores, es obvia y no contradice en ningún sentido la tesis de Weber. Lo que se discute es cuál es el *papel que desempeñan los valores* y, más específicamente los *juicios de valor*, en la investigación educativa y, en general, en la investigación científica.

Su afirmación sobre la existencia de "valores impersonales y universales" como, p. ej., la salud o la alimentación, no presupone que la ciencia pueda sustentar racionalmente juicios de valor relativos a dichos valores. La ciencia médica podría emitir proposiciones del tipo: "una alimentación suficiente y equilibrada es un *medio* apropiado para mejorar la salud de los seres humanos[7] (considerado como un fin"). Pero en ningún caso la ciencia médica puede pretender sustentar racionalmente el *valor de ciertos fines* como, por ejemplo:

[7] Para que esta proposición tenga carácter científico deben precisarse los términos que aparecen en ella como, por ejemplo, "alimentación suficiente y equilibrada" y "mejorar la salud", así como otros factores contextuales relativos a la población a la que se refiere.

"debemos procurar que los seres humanos tengan acceso a una alimentación suficiente y equilibrada", ni tampoco, "debemos mejorar la salud de los seres humanos". Estos juicios constituyen derechos humanos elementales, por los que se puede estar dispuesto a dar la vida, pero no pueden presentarse como resultados de la investigación científica.

En resumen, ninguna de estas cuatro posiciones contradice la tesis de Weber, lo que no significa que no existan otras posiciones que sí la contradigan frontalmente. En la próxima sección reinterpretaremos la tesis de Weber con base en un análisis de los *resultados que puede proporcionar legítimamente la investigación científica*, en el caso de la ciencia didáctica (desde la perspectiva de la TAD), para explicar nuestra posición, coherente con la tesis de Weber, sobre el papel que desempeñan los juicios de valor en la ciencia didáctica.

5. CARÁCTER TRANSFORMATIVO, NO NORMATIVO, DE LA CIENCIA DIDÁCTICA

Dado que la discusión en torno a la presunta normatividad de la didáctica y al papel que pueden desempeñar los valores y los juicios de valor en la investigación didáctica depende de la forma de interpretar la propia ciencia didáctica y, en especial, del tipo de resultados que esta puede emitir legítimamente, empezaremos por describir brevemente una parte importante del objeto de estudio de la didáctica (desde la perspectiva de la TAD).

En primera instancia, identificamos la didáctica con la *ciencia de las condiciones que permiten aprender cosas* o, con más precisión, la ciencia de las condiciones que hacen posible (o que dificultan) la génesis y el desarrollo de *modalidades de estudio* institucionalizadas relativas al aprendizaje de todo tipo de conocimientos. En otros términos, identificamos la ciencia didáctica con la *ciencia del estudio y la ayuda al estudio* (Gascón, 1997). En consecuencia, una parte importante del objeto de la didáctica consiste en indagar *cómo son* las modalidades de estudio vigentes (o posibles) en las instituciones escolares, esto es, cuáles son las reglas y principios que regulan su estructura y su funcionamiento (su *economía*). Complementariamente, la didáctica estudia las condiciones de todo tipo que han incidido e inciden sobre dichas modalidades de estudio, esto es, *por qué* las modalidades de estudio escolares han llegado a ser como son y *cómo podrían modificarse* en una dirección determinada (su *ecología*).

La TAD caracteriza cada modalidad de estudio mediante cuatro componentes: la "materia" que se toma como objeto de estudio, que está constituida por un *conglomerado praxeológico difuso* que evoluciona a lo largo del proceso de estudio y puede describirse mediante un *modelo epistemológico*, ME; los *medios didácticos*, MD, que se ponen en marcha para estudiar dicho objeto y que pueden representarse, por ejemplo, en términos de *juegos didácticos*; el iniciador del proceso de estudio, que se identifica con los *fenómenos didácticos*, φD, a los que responde dicha modalidad de estudio; y el objetivo que se persigue, esto es, los *fines educativos*, FE, de dicho estudio que se expresan en términos de cambios en el *equipamiento praxeológico* de los estudiantes. En consecuencia, postulamos que una modalidad de estudio se puede analizar, en primera instancia, en términos de un *sistema complejo* (García, 2011) constituido por cuatro subsistemas que constituyen lo que hemos denominado un *paradigma didáctico*: PD = [ME, FE, MD, φD]. Podemos concluir así que una parte importante del objeto de estudio de la ciencia didáctica gira en torno al análisis de la economía y la ecología de los *paradigmas didácticos vigentes* (PDV) o *posibles*, en las instituciones escolares. Para llevar a cabo dicho análisis, que denominamos *análisis macrodidáctico*, el didacta construye y utiliza inevitablemente un *paradigma didáctico de referencia*, PDR, que es un PD posible en la institución en cuestión (Gascón y Nicolás, 2021a).

Por tanto, la problemática didáctica, desde la perspectiva de la TAD, es una *problemática económico-ecológica* (Gascón y Nicolás, 2021b), lo que significa que los resultados que la investigación didáctica puede formular legítimamente son principalmente de dos tipos fuertemente interrelacionados:

(1) Expresan la coherencia (o incoherencia) del funcionamiento del PDV en una institución determinada (desde la perspectiva de cierto PDR), indicando cuales son los *fines educativos* que pueden alcanzarse cuando se utilizan unos medios didácticos dados de antemano para estudiar un dominio escolar caracterizado por cierto MEV. Estos resultados muestran los fenómenos didácticos que emergen cuando el estudio está regido por dicho PDV;

(2) Describen los medios didácticos racionalmente adecuados para conseguir unos *fines educativos* previamente determinados, pero cuya validez (de los fines) no puede ser establecida racionalmente. Complementariamente, el análisis ecológico pone de manifiesto otros resultados (queridos o no queridos) que aparecerán si se utilizan dichos medios didácticos para estudiar el dominio en cuestión.

Lo que no puede sustentar racionalmente la investigación didáctica es la validez o el "valor" de los *fines educativos* (ni, tampoco, de los medios didácticos, considerados independientemente).[8] Así, por ejemplo, un resultado del primer tipo puede formularse como sigue: con los medios didácticos del PDV en el tránsito de la Secundaria a la Universidad (en Portugal, España, Francia, ...) en torno a la modelización funcional, y en coherencia con el MEV, los *fines educativos* que pueden alcanzarse se reducen al trabajo técnico dentro de unos pocos modelos funcionales dados de antemano. En los procesos de estudio regidos por este PDV, el cálculo diferencial elemental desempeña un papel accesorio (fenómeno didáctico emergente) y no se utiliza para construir modelos funcionales de diferentes tipos de sistemas, trabajar en ellos e interpretar los resultados obtenidos (Lucas, 2015).

Un ejemplo de resultado del segundo tipo puede es el siguiente: si en dicha institución, una comunidad –que cumpla ciertas condiciones a precisar– llevara a cabo un proceso de estudio de la modelización funcional sustentado en un MER del tipo presentado en (Lucas, 2015), utilizando los mismos medios didácticos y persiguiendo los mismos *fines educativos* que se proponen en ese trabajo, entonces dicha comunidad de estudio eludirá los fenómenos didácticos asociados a las limitaciones que aparecen cuando el estudio de la modelización funcional está regido por el PDV. En coherencia con la nueva razón de ser que el MER asigna al cálculo diferencial elemental, la comunidad de estudio lo utilizará, no sólo para estudiar las propiedades de los diferentes tipos de funciones, sino para *construir modelos funcionales de sistemas de todo tipo, trabajar en ellos e interpretar los resultados obtenidos* con el objetivo de responder cuestiones que surgen en dichos sistemas.

Esta forma de interpretar una parte importante del objeto de estudio de la didáctica es compatible con la tesis metodológica de Weber que delimita claramente el objeto de estudio de las ciencias sociales y el tipo de resultados que estas pueden emitir legítimamente (formulables en términos de medios-fines).

Quedan fuera del objeto de estudio de la didáctica las cuestiones pertenecientes a la "esfera de los valores" tales como: ¿qué *debemos hacer* si el PD vigente en una institución da origen a procesos de estudio que, desde cierta perspectiva, son considerados "indeseables"?, ¿cómo *valoramos* este tipo de PD

[8] Postulamos que la confusión entre dos tipos de afirmaciones: (1) "Los medios M son (los más) adecuados o eficaces para un fin F" y (2) "El fin F es valioso" o (2') "Los medios M son eficaces o valiosos", está en la base de la incomprensión que sufrió la tesis de Weber en su tiempo y que sigue sufriendo en nuestros días. Se trata de una confusión que, como advirtió repetidamente Weber, es puramente lógica. Según el principio metodológico de Weber, la proposición (1) puede constituir un resultado de la actividad científica, pero las proposiciones (2) y (2') constituyen juicios de valor y, en ningún caso, pueden sustentarse racionalmente.

y los procesos de estudio que rige y determina?, ¿*debemos hacer algo* para que el PD vigente en una institución se modifique en una dirección determinada y, en este caso, en qué dirección?, entre los diferentes PD vigentes (o posibles), ¿cuál de ellos es *mejor*?

En definitiva, podemos completar la anterior caracterización de una parte importante de la problemática la didáctica diciendo que esta es una problemática *económico-ecológica no normativa*. Negando la función normativa, no estamos negando en absoluto la *función transformativa* de la ciencia didáctica que consiste en su capacidad para avanzar los *fines educativos* que pueden alcanzarse con unos *medios didácticos* dados de antemano y para diseñar los *medios* adecuados o pertinentes para que una comunidad de estudio (que cumpla ciertas condiciones) alcance un *fin educativo* prefijado previamente. (Gascón y Nicolás, 2016/2019, 2017, 2019, 2021a, 2021b).

6. CRÍTICA A LA INTERPRETACIÓN DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD

En (Godino, 2023) se considera que los *criterios de idoneidad* son "juicios de valor sociales fundamentados" y que, como tales, pueden considerarse resultados de la investigación de las ciencias sociales:

> Partimos de la base de que, en las ciencias sociales, y en particular, las educativas, es posible formular criterios de idoneidad, en forma de juicios de valor, *se debería hacer esto y no aquello*, en las circunstancias en que dichos juicios tienen carácter social y se explicita un fundamento para su formulación. (Godino, 2023, p. 11)

Pero la única fundamentación que se explicita para los criterios de idoneidad es la hipótesis de que son compartidos y la constatación de que están sustentados en los principios del EOS que, como los principios de cualquier otra teoría o enfoque en didáctica, son postulados.

> [Los criterios de idoneidad] se conciben como una trama de juicios de valor compartidos por una comunidad y fundamentados en los principios del sistema teórico EOS. (Godino, 2023, p. 11)

La caracterización que se hace en el mismo texto de la idoneidad didáctica permite interpretarla de una forma distinta:

> En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). (Godino, 2023, p. 11)

Si consideramos "el proceso de enseñanza-aprendizaje" como un medio M, y "la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados" como un fin F, entonces la idoneidad didáctica de M es el grado en que este, como medio didáctico, es adecuado (o idóneo) para el fin F. En esta interpretación de la idoneidad didáctica no interviene ningún juicio de valor, siempre y cuando el fin F sea considerado como un postulado.

Sin embargo, el fin F esconde un juicio de valor implícito. Puede formularse como sigue: "la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos o implementados *es deseable*". Así expresado, y esta es la forma como se suele interpretar la idoneidad didáctica, constituye un juicio de valor. En efecto, la forma como el EOS formula los criterios para cada una de las seis facetas de la idoneidad (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) pone claramente de manifiesto esta interpretación. A título de ejemplo, veamos los tres primeros criterios de idoneidad (énfasis añadido):

> Criterio de idoneidad epistémica: Los significados institucionales [...] *deberían ser* representativos del significado global de referencia [...].
> Criterio de idoneidad cognitiva: Los objetos de aprendizaje *deberían suponer* un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes [...].
> Criterio de idoneidad afectiva: El proceso de instrucción *debería lograr* el mayor grado posible de implicación del alumnado [...]. (Godino, 2021, p. 14)

Cada criterio, así formulado, constituye un juicio de valor que, como tal, no puede sustentarse racionalmente. El criterio de idoneidad afectiva, por ejemplo, puede interpretarse como sigue: "es *deseable* lograr el mayor grado posible de implicación del alumnado". Se trata claramente de un *medio* que, como tal, no puede ser deseable por sí mismo o, mejor dicho, su valor no puede sostenerse racionalmente.

Incluso los criterios de idoneidad más específicos sobre la gestión de los diferentes tipos de objetos considerados en el EOS (conceptos, proposiciones, procedimientos) adolecen del mismo defecto (énfasis añadido).

> Las definiciones y procedimientos *deben ser* claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.
> *Se deben presentar* los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.
> *Se deben proponer* situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos. (Godino, 2021, p. 16)

En todos estos casos se echa en falta la explicitación de unos *fines educativos* suficientemente precisos y contrastables empíricamente (determinados de manera absolutamente inequívoca) para formar parte de un posible resultado de la ciencia didáctica que podría formularse como sigue: "Para obtener el *fin educativo* F, los *medios* M son adecuados".

En el EOS se supone la existencia de juicios de valor compartidos en la comunidad de educación matemática:

> Este constructo sirve de punto de partida para desarrollar una teoría de la idoneidad de la actividad didáctica (TID-EOS), ya que aborda una problemática específica (identificación de juicios de valor compartidos en el seno de la comunidad de educación matemática, su formulación y estructuración), [...]. (Godino, 2023, p. 245)

Más allá de la réplica de Weber a Schmoller citada anteriormente ("la función de la ciencia consiste precisamente en convertir en problema algo convencionalmente evidente"), si existiesen juicios de valor compartidos por diferentes teorías didácticas, dichos juicios estarían sustentados en los postulados supuestamente convergentes de las citadas teorías y, como tales, no podrían ser considerados resultados de la investigación.

En definitiva, los criterios de idoneidad o bien no son juicios de valor o bien contienen juicios de valor implícitos, pero en ningún caso pueden considerarse como resultados de la investigación didáctica. Parece más razonable considerarlos como principios heurísticos:

> Los criterios de idoneidad didáctica no son reglas de obligado cumplimiento ni juicios de valor subjetivos sino *principios heurísticos* que sintetizan los resultados de las investigaciones científicas y tecnológicas en educación matemática. (Godino, 2023, p. 11)

Así interpretados, los criterios de idoneidad desempeñan en la práctica docente una función similar a la que desempeñan las reglas heurísticas de Pólya en la actividad de resolución de problemas, siempre que se especifique el fin educativo que se persigue (que, en al caso de las heurísticas de Pólya, es la resolución del problema). En ningún caso un principio heurístico puede considerarse como un resultado de la investigación didáctica.

En Godino (2023) se considera que una teoría de la idoneidad *ayuda en la toma de decisiones* para abordar la triple dialéctica entre Fines, Valores y Medios, pero, cuando se describe lo que en el EOS se entiende por Teoría de la Idoneidad Didáctica, los *fines educativos* vuelven a hacerse trasparentes:

> Con esta visión general, una Teoría de la Actividad Idónea será un sistema de juicios de valor - se debería hacer esto y no aquello - sobre cómo proceder para realizar una actividad de la mejor manera posible, teniendo en cuenta el contexto y circunstanciales específicas en que tal actividad tiene lugar. (Godino, 2023, p. 12)

En esta descripción falta claramente añadir el papel fundamental que desempeñan los fines educativos interpretados como valores "deseables" previamente determinados o acordados mediante decisiones que, en última instancia, debe tomar la comunidad educativa, pero que no pueden ser sustentadas científicamente. Los resultados de la investigación didáctica no permiten rehuir la responsabilidad de decidir entre todos los fines educativos posibles cuál de ellos es "mejor" o más "deseable" en una situación determinada, esta decisión siempre está fundamentada en valores. Como ya señalábamos en (Gascón y Nicolás, 2019), es necesario trasladar el énfasis del problema educativo desde los medios hacia los fines educativos o, con más precisión, es necesario dejar de centrarse únicamente en los medios didácticos, explicitar claramente los fines educativos, y *concentrarse en las relaciones entre medios y fines*. Las proposiciones sobre la relación medios-fines que puede hacer la didáctica, cuando el fin es claro y preciso, no comportan ningún tipo de valoraciones.

7. LOS LÍMITES DE LA CIENCIA: UTILIDAD DE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA PARA TRANSFORMAR LA PRÁCTICA DOCENTE

Nuestra forma de interpretar la ciencia didáctica niega la *función normativa* de esta, pero, como hemos dicho, no niega en absoluto su *función transformativa* que consiste en la capacidad para diseñar los medios adecuados o pertinentes para que una comunidad de estudio (que cumple ciertas condiciones) alcance un fin educativo prefijado previamente.

De nuevo, en cuanto a las relaciones entre la investigación didáctica y las prácticas docentes, el debate no se debería establecer entre dos posturas antagónicas: ¿se pueden o no se pueden "aplicar" ("implementar" o "utilizar") los resultados de la investigación didáctica para transformar (o para "mejorar") los procesos de enseñanza aprendizaje? La discusión es un poco más compleja y debería plantearse en los términos siguientes: ¿*cómo pueden utilizarse* los resultados de la investigación didáctica para transformar los procesos educativos en una dirección determinada?

Nuestra forma de interpretar la función transformativa de la ciencia didáctica está explicitada en (Gascón y Nicolás, 2021b) y puede sintetizarse como sigue: un resultado de la investigación didáctica no puede afirmar cómo *se debe* conceptualizar cierto dominio de la matemática escolar, cuál es el modelo epistemológico *más adecuado* para representarlo, qué medios didácticos *deben ponerse en marcha* para organizar su estudio en una institución escolar, ni qué argumentos *deben utilizarse* a lo largo del proceso de estudio. Tampoco nos dirá cuáles son los fines educativos que *deben perseguirse* con dicho estudio o los fenómenos que *se deben evitar o favorecer*. En definitiva, un resultado de la investigación didáctica no puede afirmar que un PD concreto es el "mejor" o el más "adecuado" o el más "idóneo" para regir el estudio de cierto dominio en determinada institución escolar, porque esto equivaldría a un juicio de valor.

Pero lo que sí puede afirmar un resultado de la investigación didáctica es que existe una conceptualización de dicho dominio de la matemática escolar, representada por cierto modelo epistemológico, y unos medios didácticos que son útiles y racionalmente adecuados para que la comunidad viva un proceso de estudio capaz de alcanzar unos fines educativos previamente especificados (y cuyo valor no puede ser establecido racionalmente). Dicho resultado de la investigación también puede afirmar que, con este proceso de estudio, se evitarán (o favorecerán) ciertos fenómenos didácticos que eran invisibles desde la perspectiva del paradigma didáctico vigente. Este tipo de resultado no prejuzga nada sobre el valor del PD que cumple estas características.

¿En qué consiste, por tanto, la utilidad de los resultados de la investigación en lo que respecta a su incidencia sobre la acción didáctica? En general, podemos decir que, como en todas las ciencias, lo que puede ser útil para modificar la acción (didáctica) se desprende de las hipótesis atrevidas y fecundas que propone la ciencia (didáctica). Por ejemplo, sería interesante preguntarse cuál ha sido y sigue siendo la utilidad de los resultados de la ciencias histórico-sociales como instrumentos para la transformación de la acción social. Dichos resultados, ¿prescriben normas para la acción social o proporcionan *posibilidades de acción*? Las ciencias naturales y, en realidad, todas las ciencias, nos proporcionan inmensas posibilidades de acción en todos los ámbitos de la vida, pero en ningún caso pueden proporcionarnos juicios de valor sobre dichas acciones ni sobre sus consecuencias.

En definitiva, el sentido profundo del principio según el cual la ciencia "no puede" hacer juicios de valor es el de *ilustrarnos sobre los límites de la ciencia*, sobre los criterios que la ciencia puede proporcionar, y sobre los que están fuera del ámbito científico, en relación con la orientación del "modo de vida" de los seres humanos y de las instituciones humanas. Los criterios científicos y los resultados de la investigación no permiten rehuir la responsabilidad de tomar decisiones en el ámbito de los valores, pero pueden ayudar a desvelar las condiciones que se requieren para hacer efectiva una decisión y las consecuencias de esta. Una ciencia empírica, como, por ejemplo, la didáctica, no puede enseñar a nadie *qué debe hacer*, sino solo *qué puede hacer* y *cómo puede hacerlo* para alcanzar unos fines previamente determinados con claridad, así como las consecuencias queridas y no queridas de su acción.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado al amparo de los proyectos PID2021-126717NB-C31 y PID2021-126717NB-C32 financiados por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033 y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

REFERENCIAS

Bartolini Bussi, M. G. (2018). Answer to Gascón y Nicolás. *For the learning of mathematics*, *38*(3), 50–53.

Bourdieu, P. (2001). *Science de la science et réflexivité*. Editions Raisons d'Agir.

Bunge, M. (1998). *Las ciencias sociales en discusión: una perspectiva filosófica*. Editorial Sudamericana.

Bunge, M. (2016). *Between two worlds. Memoirs of a philosopher-scientist*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-29251-9

Chevallard, Y., Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., Gascón, J., Nicolás, P. y Ruiz-Munzón, N. (Eds.) (2022). *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*. Birkhäuser, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_2

Davis, B. (2018). What sort of science is didactics? *For the learning of mathematics*, 38(3), 44–49.

García, R. (2011). Interdisciplinariedad y sistemas complejos. *Revista Latinoamericana de Metodología de las Ciencias Sociales*, *1*(1), 66–100.

Gascón, J. (1997). The Didactics of Mathematics as the Science of the "Art of Studying". En N. A. Malara, (Ed.), *An International View on Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 7–12). International Congress on Mathematical Education, ICME 8.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2016/2019). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. *Educação Matemática Pesquissa, 21*(4), 36–52. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p036-052

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics, 37*(3), 9–13.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2018). Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico. En H. Chaachoua y M. Bosch (Eds.), *Sixth International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 88–102). Autrans (Grenoble).

Gascón, J. y Nicolás, P. (2019a). Research ends and teaching ends in the anthropological theory of the didactic. *For the learning of mathematics, 39*(2), 42–47.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2019b). What kind of results can be rationally justified in didactics? En M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García y J. Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education*: *A comprehensive Casebook* (pp. 3–11). Routledge.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021a). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática, 33*(1), 7–40. https://doi.org/10.24844/em3301.01

Gascón, J. y Nicolás, P. (2021b). Relaciones entre la investigación y la acción en didáctica de las matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 20*, 23–39. https://doi.org/10.35763/aiem20.4033

Godino, J. D. (2021). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática. *Revemop*, *3*(e202129), 1–26. https://doi.org/10.33532/revemop.e202129

Godino, J.D. (2023). Diálogo entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática sobre las nociones de juicio de valor, praxeología y paradigma didáctico. *Educación Matemática*, *35*(1), 229-254. https://doi.org/10.24844/EM3501.09

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the learning of mathematics*, *39*(1), 38–43.

Lacey, H. (1999). *Is science value free? Values and scientific understanding.* Routledge.

Lerman, S. (2018). Towards subjective truths in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *38*(3), 54–56.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Vigo.

Mosterín, J. (2008). *Lo mejor posible. Racionalidad y acción humana*, Alianza Editorial.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the learning of mathematics*, *39*(1), 33–37.

Proulx, J. (2018). Prescriptions and proscriptions on mathematics teaching: interesting cases of lost in translation. *For the learning of mathematics*, *38*(3), 56–57.

Rudner, R. (1953). The scientist qua scientist makes value judgments. *Philosophy of Science, 20*(1), 1–6.

Rugina, A.N. (1998). The problem of values and value-judgments in science and a positive solution: Max Weber and Ludwig Wittgenstein revisited. *International Journal of Social Economics, 25*(5), 805–854.

Staats, S. y Laster, L. A. (2019). About Time. *For the learning of mathematics*, *39*(1), 44–47.

Weber, M. (1973). *Ensayos sobre metodología sociológica*, Amorrortu.

Weber, M. (2010). *Por qué no se deben hacer juicios de valor en la sociología y en la economía.* Alianza Editorial. Trabajo original publicado en 1917.

Weber, M. (2001). *La ética protestante y el espíritu del capitalismo.* Ediciones Península.

Autor de correspondencia

JOSEP GASCÓN PÉREZ

Dirección: Campus de la Universidad Autónoma de Barcelona,
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Biociencias,
Edificio C, Carrer dels Til·lers, 08193 Bellaterra (Barcelona)

Teléfono: (0034)935814538

 https://doi.org/10.24844/EM3502.03

Capacidad de enseñanza de la magnitud masa y reflexión en la formación inicial docente: el caso de una maestra de infantil

Teaching capacity for the weight notion and teacher reflection of prospective educators: the case of an early childhood teacher

Pamela Reyes Santander,[1] Tatiana Goldrine Godoy,[2]
Raimundo Olfos Ayarza[3]

Resumen: El interés por la formación inicial docente para la enseñanza de la matemática en infantil y la inclusión de la reflexión en la formación del profesorado, motiva el estudio de caso de una futura maestra de infantil, para mostrar cómo un ciclo de reflexión fortalece la enseñanza de la magnitud masa. Videos de práctica, audios de participación en una comunidad docente e informes reflexivos, fueron analizados cualitativamente desde el constructo *Capacidad de enseñanza*, en sus componentes conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido sobre la enseñanza y el pensamiento matemático infantil. Gracias al ciclo de reflexión, la futura maestra evidencia cambios en su comprensión sobre el tratamiento de la magnitud masa, precisando la información sensorial y la organización de los objetos, enriqueciendo los atributos mesurables ofrecidos a los niños. El ciclo de reflexión muestra su potencial como dispositivo formativo para la mejora de la formación inicial docente en educación matemática en infantil.

Fecha de recepción: 15 de septiembre de 2021. **Fecha de aceptación:** 27 de abril de 2023.

[1] Universidad de Las Américas, reyes.santander.pamela@gmail.com, orcid.org/0000-0002-3422-2627.
[2] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, tatiana.goldrine@pucv.cl, orcid.org/0000-0002-7377-4221.
[3] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, raimundo.olfos@pucv.cl, orcid.org/0000-0002-9886-4282.

Palabras claves: *formación inicial de profesores; maestras de infantil; matemática; magnitud masa; reflexión docente.*

Abstract: The interest in initial teacher education in early mathematics and the inclusion of reflection in training, motivate to study the case of one prospective childhood teacher, to show how a cycle of reflection contributes to increase the mathematics teaching capability for to teach weight notion. Videos of her practice, audios of her participation in a teaching reflection community and personal reflection reports are qualitatively analysed with the construct mathematics teaching capability in its component: content knowledge and pedagogical content knowledge about teaching and the mathematics thinking during early childhood. Thanks to the reflection cycle, the prospective teacher evidences change in her understanding about of how to teach to weight notion, specifying the sensory information and the organization of the objects, improving the measurables attributes offered to the children. The reflection cycle shows its potential for improvement initial teacher education in early mathematics.

Keywords: *initial teacher training; early childhood teachers; mathematics; relative weight notion; teacher reflection.*

INTRODUCCIÓN

La educación preescolar exige mayor profesionalización de la formación de las maestras de infantil, ya que se reconoce que la educación infantil es la base para el éxito escolar posterior (Buysse *et al.*, 2009; Sheridan *et al.*, 2009). En particular, el aprendizaje de la matemática en los primeros años es predictor de logros académicos futuros, tanto en matemática como en lenguaje (Kilday y Kinzie, 2008).

Sin embargo, se ha detectado que las maestras egresan de la formación inicial docente con conocimientos insuficientes para enseñar matemática (Esen *et al.*, 2012), específicamente en el eje de números (Goldrine *et al.*, 2015) y de geometría (Samuel *et al.*, 2015). En Chile, país donde se llevó a cabo este estudio, las futuras maestras son expuestas a una formación que privilegia la transmisión de conocimientos por sobre la reflexión sobre la práctica (Falabella y Rojas, 2008). Otros estudios muestran preocupación por la formación de las maestras de infantil para la enseñanza disciplinar en matemáticas (Parks y Wager, 2015;

Horm *at al.*, 2013) y en ciencias (Cantó *et al.*, 2016), así como, proponen sugerencias para el diseño curricular y la mejora en la preparación de las maestras de infantil (Simpson y Linder, 2014).

Leavy y Hourigang (2018) recomiendan incluir experiencias formativas de calidad en la preparación de las maestras de infantil, donde la reflexión en la acción y sobre la acción (Schön, 2002) son una alternativa poderosa para enfrentar esta problemática. Para Perrenoud (2004), la reflexión sobre la práctica debe ser un hábito dentro de la preparación del profesorado, para que estetransite desde un rol pasivo de estudiante hacia un rol activo de docente.

En la preparación de maestras de infantil, Wood y Bennett (2000) muestran cambios en el conocimiento del contenido cuando existe una reflexión sobre la práctica, por lo que sugieren incluir la reflexión en los programas de formación de maestras. En la misma dirección, Mora (2007) indica que la inclusión de la reflexión en la formación de maestras de infantil promueve cambios en los niveles de reflexión, y entrega a las docentes herramientas para la solución de problemas de la enseñanza.

Para Arcavi y Schoenfeld (2008), el desarrollo profesional docente es significativo si involucra una reflexión explícita de los conocimientos, objetivos y creencias en torno a la práctica. Para Ametller y Alsina (2017), el modelo reflexivo ALACT nominado por sus siglas en inglés, (A) Acción; (L) Revisar la acción; (A) Toma de conciencia de los aspectos esenciales; (C) Crear comportamientos alternativos; (T) Ensayar, de Korthagen (2001), describe un proceso idóneo que se presenta como una alternativa para conjugar acción y reflexión. Además, busca la reconstrucción de la experiencia de enseñar desde un andamiaje colectivo, con procesos de reflexión grupales e individuales. Por lo anterior, se ha considerado para este estudio, la inclusión del modelo de reflexión ALACT en la etapa final de la formación de maestras de infantil en el eje de matemática.

En la educación preescolar, particularmente, la enseñanza de la medida se ha visto relegada a un segundo plano, evidenciando la necesidad de gestionar prácticas de enseñanza que permitan a los niños descubrir las magnitudes, entre ellas, la masa (Alsina y Salgado, 2019). En la misma dirección, Sánchez-Matamoro *et al.* (2018) indican que se ha prestado poca atención al concepto de magnitud y su medida. Según Belmonte Gómez (2005), el concepto de magnitud estaría ausente en varios currículos escolares, por lo cual se reconoce la necesidad de investigaciones en el eje de magnitudes, en particular, de la masa.

Así, la problemática del estudio es la formación inicial de las maestras de infantil en el eje de la magnitud. Para abordar esta problemática, se propone el ciclo ALACT como modelo de reflexión docente, junto con el constructo *Capacidad de enseñanza de la matemática*, que ofrece una conceptualización de un saber profesional de referencia para la enseñanza de la magnitud masa en infantil.

El objetivo de este estudio es documentar, a través de un estudio de caso, cómo la reflexión docente contribuye a la mejora de una propuesta pedagógica, fortaleciendo la capacidad de enseñanza de la magnitud masa de la futura maestra de infantil. La pregunta de investigación es ¿cuáles son los puntos críticos del ciclo de reflexión que afectan la capacidad de enseñanza de la magnitud masa de la futura maestra de infantil?

MARCO DE REFERENCIA

Ciclo de Reflexión ALACT

El modelo de reflexión ALACT (Korthagen, 2001; 2010), ha sido incluido en la etapa final de la formación de maestras de infantil. Para Ametller y Alsina (2017), este modelo favorece la reconstrucción del conocimiento docente, ya que según estos autores, el conocimiento sobre la práctica docente debe ser creado por el mismo profesor en formación, más que ser un conocimiento creado o transmitido por otros.

El modelo ALACT de Korthagen (2001) ha sido empleado en formación inicial y continua del profesorado. Korthagen (2010) describe el proceso destinado al aprendizaje reflexivo por parte del profesor, como un proceso cíclico con cinco fases:

- (A) acción. Experiencia que da el punto de partida a la reflexión.
- (L) mirar hacia atrás en la acción. Esbozar una "imagen" de lo que fue la situación real.
- (A) toma de conciencia de los puntos importantes, críticos o esenciales de la experiencia.
- (C) crear comportamientos alternativos para "resolver" los puntos críticos.
- (T) comprobar en una nueva situación. La cual fue replanteada a partir de la reflexión del ciclo. Esta nueva implementación es el inicio de un nuevo ciclo de reflexión.

La reflexión sobre la práctica permite a la futura maestra de infantil establecer conexiones claves entre el saber teórico y la práctica docente; acercamiento entre teoría y práctica que ha sido conceptualizado, en términos de Schön (2002), como "conocimiento en la acción" y "reflexión desde la acción". Para Lave (1991) la reflexión sobre la práctica es el vehículo sobre el cual se establece una relación dialéctica entre teoría y práctica, lo cual decanta en la capacidad de enseñanza de contenidos disciplinares en escenarios situados.

ENSEÑANZA DE LA MAGNITUD MASA[4] EN EDUCACIÓN INFANTIL

Para Clements y Sarama (2004), las magnitudes y la medida son una de las aplicaciones matemáticas al mundo real más importantes de la educación matemática en infantil. Las nociones relevantes del eje son la longitud, el área, el volumen y la magnitud masa. Según Sophian (2004), los niños de infantil sin instrucción tienen una vaga comprensión de la importancia del tamaño de la unidad, para los problemas relacionados con la medición, aunque esta comprensión crece rápidamente cuando tienen la oportunidad de hacer observaciones y manipulaciones con objetos.

Clements (2004) reconoce que, si bien los niños de infantil saben que hay propiedades relativas a la cantidad, la longitud y la masa, ellos no saben cómo razonar acerca de estos atributos y cómo medirlos con precisión. Para Greenes (1999), es importante que los niños se familiaricen con el lenguaje requerido para describir las relaciones de medición por medio de la comparación, tales como más largo, más alto, más grande, más corto, liviano o pesado, como base para el aprendizaje del concepto de medición en la educación escolar.

En particular, la comprensión de la masa tiene una trayectoria que comienza en los primeros años de vida con las acciones cotidianas de los niños. Para Alsina (2015), los niños pequeños de 0 a 3 años, en situaciones de manipulación, experimentación y juego, tienen experiencias con los atributos mensurables de

[4] La noción de masa y la noción de peso están estrechamente relacionadas en contextos terrestres (www.bipm.org). La masa es la cantidad de materia de los cuerpos y se mide en kilogramos. El peso es la fuerza que ejerce la gravedad sobre la masa y se mide en newtons. En lenguaje común, estos dos términos han sido utilizados indistintamente, pero físicamente son distintos, la masa es una magnitud escalar y el peso es una magnitud vectorial. Las balanzas y básculas de contrapeso miden la masa y los objetos de resortes (dinamómetro) miden el peso. En contextos escolares la diferencia entre peso y masa se hace recién en secundaria. Este artículo ha mantenido la palabra peso en la transcripción de video y entrevistas.

los objetos. Clements y Stephan (2005), indican que el juego sensoriomotor temprano, desde el nacimiento hasta los dos años, está relacionado con las matemáticas, ya que las actividades sensoriomotoras pueden proporcionar fundamentos o experiencias directas con ideas y conceptos matemáticos.

Algunos investigadores sugieren ofrecer a los niños recursos manipulativos que permitan la comparación de los atributos de los objetos (Alsina, 2015; Clements *et al.*, 1998; Clements y Stephan, 2004; Pizarro *et al.*, 2018; Greenes *et al.*, 2004). En este sentido, la selección del material que realice la maestra de infantil puede ser determinante para el éxito de las situaciones de aula relacionadas con la masa. Para que los niños puedan reconocer la existencia de este atributo, las experiencias ofrecidas por la docente deben permitir a los infantes el contacto y la manipulación de los recursos.

En la etapa de infantil, las nociones básicas asociadas a la magnitud masa requieren de actividades iniciales con herramientas y medidas no estandarizadas que permitan comparar la masa de diferentes objetos (Peter-Koop y Grüssing, 2007), por ejemplo, como un colgador (imagen 1).

Imagen 1. Niña (2a - 6m) identificando el cojín más liviano.

La noción de masa en la cual se centra este estudio, está relacionada con la cantidad de materia que pueden levantar los niños, esto es, la percepción propia que tiene el niño al levantar diferentes objetos con diferentes masas. Se podría dar el caso que un niño tome dos objetos, uno en cada mano y que compare cuál de ellos pesa más. Las acciones para realizar, en este caso, coinciden con el uso de comparativos, tales como "para mí, esto es más pesado" o "para mí, esto es más liviano".

Según Lehrer *et al.* (2003), las nociones sobre magnitudes y medidas consisten en una red de conocimientos interconectados, donde lo intuitivo juega un rol principal, sobre todo en los primeros años. Así, la noción de masa no estandarizada es una parte importante de lo que será luego el conocimiento sobre la masa y sus medidas estandarizadas, por lo que es necesario proponer actividades a temprana edad para el desarrollo de la noción masa.

El NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2003) establece la *medida* como un bloque de contenido para la educación matemática escolar, a fin de que los alumnos logren comprender los atributos mesurables y aplicar procedimientos de medición. Se recomienda la *medición y datos* como dominio para la educación matemática en infantil, precisamente el estándar "Describir los atributos mesurables de los objetos, tales como la longitud y el peso" (Common Core State Standards Initiative, 2019).

Según Alsina (2015), la magnitud masa es uno de los atributos mesurables que forman parte de los contenidos de la educación matemática de 0 a 3 años. La presencia del eje de medida en el currículo de la educación matemática preescolar, en particular la masa, amerita que las futuras maestras cuenten con una formación que desarrolle una capacidad de enseñanza para diferentes áreas. Belmonte Gómez (2005) propone un proceso para construir este concepto a nivel escolar, que comienza con comparar para constituir clases de equivalencia, organizar los objetos en clases de equivalencias y ordenar o categorizar estas clases. Esta trayectoria abarca desde infantil hasta la secundaria y se describe en siete etapas: i) estimación sensorial; ii) comparación directa; iii) comparación indirecta; iv) elección de una unidad; v) sistemas de medidas irregulares; vi) sistemas de medida regulares y vii) el sistema legal S. M. D.

CAPACIDAD DE ENSEÑANZA PARA LA MAGNITUD MASA EN INFANTIL

La conceptualización sobre la naturaleza de las capacidades que requiere construir el futuro profesor durante la formación inicial docente (FID) pone en juego la articulación de conceptos sobre conocimiento teórico, conocimiento práctico y práctica educativa. La relación entre lo que un profesional conoce teóricamente y lo que hace en la práctica, ha sido objeto de diversas conceptualizaciones, que coinciden en postular que el conocimiento teórico influye en el conocimiento práctico, y viceversa, pero además que el conocimiento práctico es situado, holístico e implícito (Clará y Mauri, 2010).

Para abordar lo que ha de aprender la futura maestra en FID en educación matemática, los autores del presente trabajo, proponen el constructo *Capacidad de enseñanza de la matemática*, donde el saber teórico y hacer práctico interactúan dialécticamente (Olfos *et at*., 2022; Olfos *et at*., 2019). En este punto, es necesario aclarar que se hace referencia a "enseñanza de la matemática" como término genérico utilizado en la literatura sobre FID. No obstante, en infantil más que "enseñar", se implementan contextos pedagógicos que generan oportunidades de aprendizaje.

El constructo *Capacidad de enseñanza de la matemática* de la maestra de infantil, constituye un desarrollo teórico que pretende capturar el cuerpo de conocimientos, creencias y prácticas que una maestra movilizaría para enseñar (Olfos *et at*., 2022; Olfos *et at*., 2019), retomando la conceptualización de Shulman (2005) sobre el conocimiento del profesor que considera tres componentes: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico y conocimiento pedagógico del contenido.

A partir del constructo *Capacidad de enseñanza de la matemática* y de la caracterización de enseñanza de la magnitud masa en infantil, esta investigación propone la *Capacidad de Enseñanza de la futura maestra para la noción magnitud masa*. La tabla 1 presenta un saber profesional de referencia que conceptualiza un saber conceptual (conocimiento docente) y un saber hacer (práctica docente) de la maestra de infantil para la enseñanza de la magnitud masa. Para los fines de este trabajo, este constructo representa un marco para analizar el proceso de la maestra al transitar por el ciclo ALACT. El constructo presenta las componentes: [1] Conocimiento del Contenido (CC) y [2] Conocimiento Pedagógico del Contenido, constituido por el Conocimiento Pedagógico del Contenido para la Enseñanza (CPC-ENS) y Conocimiento Pedagógico del Contenido referido al conocimiento docente sobre el pensamiento matemático infantil (CPC-PMI).

Tabla 1: Capacidad de la enseñanza de la magnitud masa en infantil

CC	• Conceptos de masa: magnitud y unidad de medida. Posible trayectoria del concepto en primer ciclo: – estimación sensorial, a mayor trabajo mayor masa, que corresponde a la relación entre lo intuitivo y el atributo; – generación de la noción unidad irregular y atributo – comparación y estimaciones entre diferentes objetos: a) iteración sucesiva de la unidad irregular de medida; b) diferenciar y elegir una unidad de medida irregular, formación de clases de equivalencias. • Uso de lenguaje: muy liviano, liviano, pesado, muy pesado desde una perspectiva personal. Relación entre objetos y representaciones, traslado de objetos, diferenciar entre liviano y pesado. Importancia de los conceptos masa para la trayectoria escolar, elegir un objeto como unidad de medida irregular para comparar "más pesado o liviano que ese objeto".
CPC ENS	• Enfoques de enseñanza (constructivo, formal, social, enactivo). Secuencia de tareas considerando la trayectoria del conocimiento del contenido y propuesta de Belmonte Gómez (2005). Desarrollo de habilidades de procesos, tales como experimentación y manipulación de diferentes tipos de materiales. • Considera momentos de trabajo, tipo de trabajo (grupales, personales, uso de medios orales, visuales, táctiles o auditivos), preguntas iniciales, problemas, situaciones o réplicas de actividades ya probadas. Uso de material para la generación de representaciones por medio de un trabajo exploratorio a través de los sentidos.
CPC PMI	• Etapas del aprendizaje de nociones matemáticas y su relación con el atributo masa. Conocimiento de las dificultades y obstáculos cognitivos que podrían tener los niños para el caso masa: trayectoria entre lo sensorial y lo estandarizado. • Mediación docente frente a las acciones de los niños relativas a la comprensión de la magnitud masa, estrategias, preguntas idóneas y preguntas directas para promover lo intuitivo y lo formal del atributo masa. Diferenciación en los niveles de logros de los niños y propuestas para evaluar la trayectoria de la magnitud masa a través de los años.

METODOLOGÍA

Contexto, diseño y participantes

El estudio es de carácter cualitativo instrumental (Stake, 2005), situado desde un paradigma descriptivo interpretativo. Se presenta un caso de estudio nominado Ana, estudiante universitaria de último año. La investigación se realizó en un programa de FID de maestras de infantil de cuatro años, el cual incluye una asignatura de Didáctica de la Matemática de un semestre. En este curso se revisan contenidos disciplinares y didácticos para la enseñanza de lógica, número, espacio, geometría y magnitudes en infantil, con un abordaje superficial de lo propuesto por Belmonte Gómez (2005) para el caso de la magnitud masa.

Ana participó en una comunidad de reflexión docente conformada por siete futuras maestras, todas en el último semestre, realizando la práctica profesional. Además, participaron dos docentes investigadoras miembros del programa de formación docente. La comunidad docente se reunió de manera quincenal durante cinco meses, realizando un total de 9 sesiones. El caso se centra en el proceso reflexivo de Ana, quien realizó su práctica profesional en un centro de educación inicial, con niños de 1 año, 10 meses a 2 años, 5 meses (en adelante 2a-5m). Ana realizó una propuesta pedagógica exploratoria de la magnitud masa, implementándola con sus alumnos.

Del grupo de siete futuras maestras, se estimó que el caso de Ana era una evidencia de los cambios producidos en la capacidad de enseñanza, como producto de la reflexión docente.

Instrumentos para la recopilación de información

La recogida de información se realizó a través de: (i) planificaciones de la propuesta pedagógica diseñada por las maestras; (ii) grabación de audio de las reuniones de la comunidad docente; (iii) filmación de las situaciones de enseñanza implementadas por las futuras maestras y (iv) informes de reflexión docente. El estudio solicitó los consentimientos informados de las futuras maestras, del director del centro escolar y de los padres de los niños.

RESULTADOS: EL CASO DE ANA Y LA ENSEÑANZA DE LA MAGNITUD MASA

Ana realizó una propuesta pedagógica exploratoria de la magnitud masa, llevando a cabo –al inicio del ciclo ALACT– una primera implementación con un grupo de 4 niños. Luego, durante el tránsito por el ciclo, lleva a cabo una segunda implementación con mejoras, con un grupo de 7 niños.

El ciclo de reflexión realizado por Ana en la comunidad docente es presentado en la figura 1. Los resultados se muestran según las fases del ciclo ALACT y se analizan de acuerdo con las componentes CC, CPC-ENS y CPC-PMI mostrados en tabla 1, para identificar los puntos críticos que afectan la capacidad de enseñanza de la maestra.

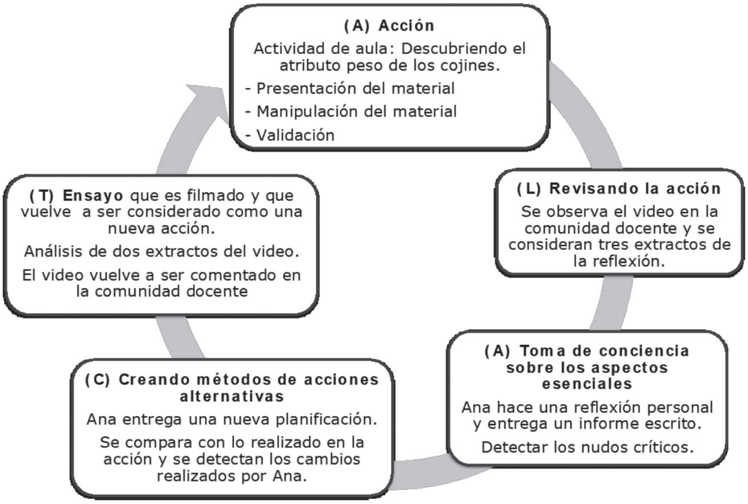


Figura 1. Esquema de los momentos del ciclo ALACT en el estudio de caso Ana.

(A) Acción: Ana planificó e implementó una primera situación que denominó "Descubriendo el atributo masa de los cojines". Consta de tres partes: presentación de los cojines a los niños, manipulación del material y validación. El objetivo fue que los niños identificaran las diferencias de masas, mediante la manipulación de cojines que varían en los atributos de masa, tamaño, color y tipos de relleno. A continuación, se muestran tres extractos para cada una de las partes de la primera implementación.

Primera implementación. Presentación del material

Imagen 2: Ana presenta el contenedor con cojines.

Ana (A):	Miren niños lo que traigo ¿Qué habrá acá? ¿Qué será lo que hay acá en este contenedor? Miren. ¿Suena? ¿Escuchan? ¿No se escucha? ¿Lo quieren ver? ¿Qué será?
Niños (Ns):	Se acercan al contenedor.
A:	¿Qué habrá acá? ¿Lo sacamos? ¡A la una, a las dos y a las tres! ¿Qué hay acá, que son estos? Son cojincitos. Mira. (Imagen 2).

Al contrastar este episodio con el constructo (tabla 1), en particular para la componente CC, se observa que el uso de la palabra "escuchar", queda fuera de contexto para la magnitud masa. Por otro lado, Ana ha considerado material concreto para la experimentación del atributo.

En cuanto al componente CPC-ENS, en la preparación de la secuencia de la tarea, no se ha incluido una gestión de oportunidades para que todos los niños experimenten el atributo masa de los cojines. Como se muestra en la imagen 2, hay escaso material preparado, por lo que cada niño no puede tener su propio material para explorar el atributo masa.

Se observan debilidades en CPC-PMI, ya que la abundancia de preguntas por parte de Ana se anticipa a la actividad exploratoria de los niños. En este caso, Ana expone un desconocimiento del rol de la actividad motriz y manipulativa por parte de los niños, en la adquisición de las primeras nociones matemáticas, de carácter perceptivo e intuitivo (Alsina, 2015).

Primera implementación. Manipulación del material

A:	¿Quieres sacar uno N2? ¿N4? ¿N3?
Niño 1 (N1, 1a-10m):	Saca un cojín y lo mueve de arriba hacia abajo.
N2 (1a-11m):	Saca un cojín.
N3 (1a-9m):	Saca un cojín y lo mueve de arriba abajo.
N4 (2a-3m):	Saca un cojín.
A:	¿Cómo son estos cojines? ¿Están rellenos estos cojines?
N2:	Se acerca a tomar otro cojín.
A:	(Toma uno de los cojines y lo muestra realizando una pregunta) ¿Son pesados? (Toma el cojín y lo deja caer). Mira cómo caen, ¿se escucha? (dirigiéndose solo a N3).
N1:	Deja caer el cojín que tiene en sus manos.
A:	Y este, ¿cómo cae? ¡Oh! ¿viste? Silencio. Mira, toma éste (le pasa un cojín a N3), y este ¿cómo será? (le pasa otro cojín a N3).
N3:	Toma el cojín, lo observa y lo mueve de arriba hacia abajo.
A:	¿Cuál es más pesado? Ese es pesado y este, ¿es más liviano? (mostrando los cojines) ¿y este cojín? mira, ¿N2? (le pasa dos cojines a N2).

N2:	Toma el cojín, ambos pesados, y luego toma uno de los livianos
A:	Este es más pesado, este es igual, y ¿este cojín? Mira prueba con este, este es más liviano y ese es más pesado. Y este N3 ¿es liviano? (le pasa un cojín a N1) ¿y este cojín N1? este también es liviano. Y ¿este cojín es pesado? ¿Cuál es el cojín liviano? ese, ¡bien! (dirigiéndose a N3), (le pasa un cojín a N1).
N1:	Tiene dos cojines uno en cada mano.
A:	Muéstrame el cojín pesado, ¿cuál es el cojín que pesa más? (dirigiéndose a N1)
N1:	Levanta uno de los dos cojines.
A:	¿Ese? Bien, ese es el que pesa más.

Al relacionar este segundo episodio con el constructo (tabla 1), observamos en CC que Ana vuelve a utilizar la palabra “escuchar”. La masa no se escucha, sino que el sonido se produce por el rozamiento del material. Ana muestra un CC débil, ya que expone como idea errónea que los objetos con mayor masa caen más rápido, realizando una demostración ante los niños. Espera una reacción de parte de los niños frente a la caída de los objetos. Con esto, no considera que la noción de masa es una red de nociones y conocimientos interconectados que preceden a la construcción y coordinación de tal noción (Lehrer y otros, 2003).

En cuanto a CPC-ENS, la secuencia se organiza alrededor de preguntas similares “este cojín ¿es pesado?” o “¿cuál es más pesado?” No se han considerado los elementos de la trayectoria (tabla 1), relación entre unidad y atributo (pesado/liviano) y la comparación entre dos objetos, que permite luego repetir una unidad de medida. No considera el levantamiento de la cantidad de materia que deben realizar los niños para experimentar la noción de masa e insiste en decir a los niños “mira” como acción para experimentar el atributo masa.

En cuanto a CPC-PMI, se puede decir que no se considera la representación corporal de balanza para la exploración sensorial del atributo masa. Al inicio, la primera acción que realizan los niños es mover el cojín hacia arriba y hacia abajo, para “tantear” la cantidad de materia que pueden levantar. Ana no se percata de esta acción de los infantes, la cual es crucial para adquirir la noción de masa.

Primera implementación. Validación

A:	¿Les gustó trabajar con los cojines? Parecían iguales, pero algunos eran más pesados que otros. Ahora ¿Me ayudan a guardar el material en el contenedor?
N1 y N2:	Ayudan a guardar el material en un contenedor.

El análisis del episodio muestra que la actividad preparada por Ana no favoreció que los niños identificaran las diferencias de masa, que se traduce en levantar una cantidad de materia, ya que solamente había un contenedor para guardar los cojines, sin diferenciar las nociones liviano y pesado, lo que muestra un débil CPC-ENS, que no le permite lograr el objetivo que ella se propuso.

En esta etapa del ciclo ALACT se pueden identificar los siguientes puntos críticos:

- Uso de un lenguaje inapropiado a la enseñanza de la magnitud masa.
- Material inapropiado para la exploración del atributo.
- Falta de conocimiento sobre la actividad motriz y manipulativa del nivel etario.
- Conocimiento débil de la enseñanza de la magnitud masa en el nivel infantil.

Estos puntos críticos son reconocidos por Ana en la siguiente etapa de reflexión.

(L) Revisando la acción: Esta fase se realiza en la sesión de la comunidad docente, revisando la filmación y analizándola de manera conjunta. A continuación, se presentan tres extractos de la sesión donde se muestra la reflexión crítica que hace Ana de su práctica docente y donde se activan algunos puntos críticos mencionados en **(A)**.

Extracto 1 de la reflexión en la comunidad docente

D1:[5] ¿Algún momento especial que te llame la atención?

A: La actividad tenía una dificultad mayor a lo que los niños estaban acostumbrados, como que para su nivel era muy difícil. Yo tampoco sabía en qué etapa estaban y el material también era nuevo, entonces les llamó más la atención que estaban rellenos y que sonaban un poquito, que tenían distintos rellenos, entonces igual había diferencias, no fue tanto el peso.

D1: ¿Por qué consideras que la actividad no era adecuada para el nivel de los niños?

A: La planificación partió con el objetivo de que los niños identificaran la diferencia del peso.

Este extracto revela que Ana reconoce que uno de los puntos críticos de la actividad tiene relación con sus propios CPC-ENS y CPC-PMI, e indica que la actividad era muy difícil para los niños, hace indicaciones sobre el material, que hacía ruido y que tenía diferentes rellenos, por lo que las diferencias no estaban en el atributo masa. Este es uno de los resultados importantes de este proceso, por lo que se insiste en la comunidad docente con preguntas para profundizar en la reflexión que hace Ana sobre su práctica y lograr cambios en su capacidad de enseñanza.

[5] Docente-investigadora.

Extracto 2 de la reflexión en la comunidad docente

D1: ¿Y cómo esperabas darte cuenta si los niños estaban identificando los atributos?

D2: ¿Cómo pensabas que ellos te iban a mostrar esta diferencia? y ¿cómo ibas a visualizar el logro del reconocimiento del atributo peso?

D1: Tú querías que identificaran diferencias. ¿Qué esperabas al planificar la experiencia, sobre la forma de darte cuenta de que ellos estaban identificando?

A: Como que me equivoqué en eso, porque como que no sabían, como nunca se habían presentado esos términos, la idea era que ellos ya tuvieran como el conocimiento de pesado y liviano, pero se empezó inmediatamente con esto.

D1: ¿Tú esperabas que los niños te mostraran como levantaban los cojines y que con eso te respondieran?

A: Claro, que levantaran los cojines, que no respondieran verbalmente.

D1: Respecto a la pregunta: ¿Cuál es el cojín más pesado? Los niños debían levantar el cojín que fuera más pesado. ¿Así te lo habías imaginado?

A: Claro, algo así. O sea, el niño igual lo levantó, pero yo no sé si habrá sido por eso...

En este extracto, Ana reconoce la dificultad de los niños para diferenciar el atributo masa en los cojines y que la situación que planificó no favorece esta adquisición. Hasta aquí, declara que el fracaso de la experiencia radica en la dificultad de la actividad propuesta para el nivel de los niños, es decir, solo puede observar su debilidad en CPC-PMI y esto de manera muy superficial. Por eso, se decide insistir en la reflexión docente y continuar haciendo preguntas con respecto a la noción masa que ella posee, tal como se muestra en el extracto 3.

Extracto 3 de la reflexión en la comunidad docente

D2: ¿Cómo reconoces que hay algo que es más pesado que otro?

A: Manipulándolo, como tomándolo, ¿a eso se refiere?

D2: Sí, me refiero a ti cuando eras más pequeña y como reaccionabas con algo más pesado ¿Cómo tú decías: “Oh, es que, no puedo”. ¿En qué casos?

A: Por el tema del peso también.

D2: ¿Cuáles eran las situaciones en que decías “no puedo”? ¿En qué casos le decías tu a mamá que no podías? Quizás, cuando te mandaron a comprar pan, frutas.

A: Claro (risas de la comunidad), cuando mi mamá me decía tráeme este objeto como la plancha o una fuente; claro, ahí uno va viendo al momento de tomarlo, si puedes llevarlo o no.

D2: Cuando no lo puedes llevar ¿Qué piensas tú?

A: Eh, como que esta, que tiene un peso mayor a lo que yo puedo, y también se podría buscar, no sé si no lo puedo levantar, se podría arrastrar, pero va relacionado con el peso, si no puedo levantar ¿Por qué? Porque tiene un peso mayor a lo que estoy acostumbrada a levantar, a mi fuerza.

En este extracto, Ana siente que da con el aprendizaje de la noción de masa (CC). La masa es cantidad de material y hay ciertos objetos que tienen mayor masa, por lo tanto, son difíciles de transportar. En este caso, se considera que puede variar la sensación de liviano o pesado, por esto, se requiere de un referente para decidir sobre mayor o menor cantidad de masa que ese referente, esto afianza una idea que nutre su CC. Además, logra "visualizar" una alternativa para la mejora de la práctica docente que enriquece su CPC-ENS. Esta alternativa surge cuando dice "llevar", ya que esta palabra da un indicio de la acción que podrían hacer los niños para trasladar cojines y apreciar el atributo liviano o pesado. En esta fase del ciclo, se ha logrado vincular dialécticamente lo práctico con lo teórico y se tiene un punto crítico que genera cambios y es detectado por Ana. Se espera que, al reflexionar en torno a este punto crítico, cambie la estructura de la actividad y otros aspectos esenciales para brindar mejores oportunidades de aprendizaje a los niños.

(A) Toma de conciencia sobre los aspectos esenciales: Esta fase ocurre de manera personal, ya que Ana debe entregar un informe escrito luego de la reflexión en la comunidad docente. A continuación, se presentan los puntos críticos que reconoce en su informe escrito, según los tres componentes de la capacidad de enseñanza.

Tabla 2. Análisis del primer informe escrito de reflexión docente de Ana

CC		Lenguaje matemático relacionado con los atributos de los objetos, los momentos para la exploración del material, la diferencia y comparación de la cantidad de material de los cojines.
CPC	ENS	Secuencia y tiempos de la actividad, no dar oportunidades para explorar el material, exceso de preguntas.
	PMI	Interés de los niños por el material y forma de incentivar la identificación del atributo masa del objeto.

En CC, se observa una reflexión personal sobre su propia práctica, se reconoce una debilidad en la falta de lenguaje matemático, se reconoce la debilidad de la noción masa relacionada con los sentidos, en la escasa oportunidad de exploración del atributo brindada a los niños. En CPC-ENS se observa una toma de conciencia sobre la calidad de la situación y la preparación de los recursos manipulativos. A partir de esta reflexión se toma la decisión de modificar el material y modificar las estrategias de acción. En CPC-PMI, Ana, no logra ponerse en el lugar de los niños y ver las estrategias utilizadas por ellos para reconocer las diferencias en la cantidad de material de los cojines, tampoco hace una relación de las etapas del aprendizaje en la que están los infantes y los desafíos que debe contener la actividad para propiciar el desarrollo de la noción masa.

(C) Creando métodos de acciones alternativos: En esta fase del ciclo ALACT, Ana considera su planificación y las reflexiones en comunidad para realizar mejoras. Los cambios que realizó se resumen en:

- Cambios en las características del material para resaltar el atributo masa, se consideran cojines de un mismo color, de igual tamaño y con diferentes masas. Dos contenedores.
- Cambios en los tiempos, se decide dejar más tiempo para la exploración del material.
- Cambios en las preguntas, no se consideran preguntas que los niños no puedan responder.
- Para concluir la actividad, propone como acción corporal guardar los cojines que los niños consideran pesados en un contenedor y, en otro, los que consideran livianos.

El cambio del material responde tanto a un incremento de CC como de CPC-ENS, ya que ofrece un recurso manipulativo de mayor pertinencia a la noción de masa. Al considerar más tiempo a la exploración, identifica lo esencial de los componentes CPC-ENS y CPC-PMI, otorgando oportunidad a los niños para explorar y descubrir por sí mismos las diferencias de atributos, reconociendo que los niños necesitan cargar y trasladar los cojines para diferenciar masas.

Al parecer, Ana logra identificar que el transportar los objetos hacia un contenedor es crucial para que los niños hagan la relación implícita entre "lo que cuesta levantar es más pesado-tiene mayor cantidad de materia" y lo que es "fácil de transportar es más liviano-tiene menos cantidad de materia".

El cambio en el cierre de la actividad muestra un incremento en CC y CPC-PMI, ya que se reconoce que a nivel sensorial habrá diferencias en la percepción de la masa.

(T) Ensayo/(A) Acción: A continuación, se muestran dos extractos de la segunda implementación que corresponden a la presentación del material y manipulación del material que ocurren en la segunda implementación:

Segunda implementación: Presentación del material

Imagen 3. Ana presenta el material y los niños exploran

A:	Miren ¿qué son estos? ¿Damos vuelta el contenedor para verlos?
N5 (1a-11m):	Se acuesta sobre todos los cojines y luego se sienta.
Ana:	Son cojines, miren. ¿Quieren tomar uno?
N5:	Toma un cojín y lo mueve de un lado a otro rápidamente. Toma otro de los cojines y lo levanta con ambas manos y luego lo suelta, mirando a Ana.
A:	Sí, los cojines. (Respondiendo a la mirada de N5)
N6 (2a–0m):	Toma un cojín y lo mueve de arriba abajo con facilidad...
A:	Mira N6. ¿Quieres tomar un cojín? Mira este cojín. ¿Quieres tomarlo? (Le pasa un cojín a N7)
N7:	Lo mueve hacia arriba y hacia abajo con facilidad.
N8 (2a–5m):	Intenta tomar un cojín con sus dos manos, no lo logra y se le cae.
A:	¿Está pesado el cojín? (Preguntando a N9)
N6:	Se acerca a tomar uno de los cojines, lo intenta con sus dos manos y exclama: "¡Ay!", sigue intentando hasta que logra pararse con el cojín y dice: "Fuercha" [Fuerza].
A:	¡Bien, con fuerza! (Diciendo a N6)
N5:	Toma un cojín y se le cae.
A:	Y este cojín ¿está pesado? (Preguntando a N5)
N5:	Toma el cojín y se le cae.
N6:	Toma uno de los cojines con ambas manos y camina con él por la sala.
A:	Y ese N6 ¿Es liviano o pesado?

La imagen 3 muestra los cojines preparados por Ana. Los niños toman los cojines, exhibiendo acciones exploratorias que le permiten verbalizar las diferencias que muestran los niños para apreciar el atributo masa. Algunos cojines son tomados con una mano y movidos con facilidad, lo cual podría ser interpretado como liviano para estos niños (menos cantidad de materia) y otros cojines son tomados con las dos manos para levantarlo, son de difícil manipulación y a los niños se les caen, esto podría ser interpretado como pesados (mayor cantidad de materia). La adecuación de la actividad a las características de aprendizaje de los infantes refleja una mejora en CPC-PMI.

En el extracto, llama la atención la expresión verbal del niño 6: “Fuercha” (fuerza), que corresponde a hacer la relación entre ejercer una fuerza para levantar una determinada cantidad de materia, mientras mayor masa tenga el objeto es más difícil de transportar este objeto. Esto es, el niño explicitó de manera espontánea que debe hacer fuerza para levantar el cojín y esto significa para este niño que es “más pesado” que otro cojín, en el sentido de que tiene mayor materia que levantar (resistencia al movimiento). Ana ofrece recursos manipulativos pertinentes para el atributo, dando evidencias de incremento en su CPC-ENS.

Segunda implementación. Manipulación del material

Imagen 4. Niños trasladan los cojines al contenedor.

A:	Ahora vamos a dejar todos los cojines en estos dos contenedores, ¿ya? vamos a guardar todos los cojines, aquí los que cuesta más de transportar (indicando un contenedor) y aquí los que cuesta menos (indicando el otro contenedor).
N7:	Lleva un cojín con una mano y lo guarda
A:	¡A guardar los cojines! Sí, muy bien un cojín liviano. (Diciéndole a N7)
N10 (2a–3m):	Levanta un cojín con ambas manos y camina con dificultad.
A:	¡Muy bien N10!
N10:	Toma un cojín pesado y se le cae.
A:	Oh, se cayó el cojín, es pesado. (Diciéndole a N10).
N10:	Toma de nuevo el cojín y lo lleva a guardar en uno de los contenedores.
N6:	Toma un cojín liviano y va corriendo a guardarlo. (Imagen 4)
A:	¡Bien, N6!
N11 (2a–1m):	Toma un cojín con sus dos manos, camina lento y lo guarda en el contenedor.
A:	¡Toma con fuerza el cojín! Acá con fuerza. (Diciéndole a N11 mientras guarda el cojín) Bien, muy bien, tienen mucha fuerza niños, ahora vamos a tapar el contenedor.

Ana reconoce que mientras mayor cantidad de materia tenga un cojín, más pesado y difícil será su transporte. En los niños, observa cómo necesitan aplicar mayor fuerza para trasladar el objeto. El lenguaje matemático utilizado es correcto, como evidencia de CC, ya que no se refiere a lo que Ana considera como pesado, más bien utiliza la palabra "pesado" según las acciones de los niños, lo cual muestra una mejora en la relación entre CC con CPC-PMI.

(L) Revisando la segunda acción: En la comunidad docente, se observa el vídeo de la segunda implementación y se analizan momentos claves, tal como se muestra en el siguiente extracto.

Extracto 1, de la reflexión en la comunidad docente

D1: ¿Puedes precisar lo que quería lograr esta segunda aplicación?
A: Desde las matemáticas se incentivó el concepto de liviano y pesado, dentro del aprendizaje de reconocimiento de atributo de objetos.
D2: ¿En la aplicación anterior tenías el mismo objetivo?
A: Sí, pero encuentro que en la segunda hubo resultados en comparación a la primera. En la otra sentí que no se pudo evidenciar el atributo peso.
D2: ¿Dónde crees que hubo una diferencia?
A: No era muy notoria la diferencia del atributo peso entre los cojines que hice. Entonces la mejoría para esta experiencia era que fuera más notorio la diferencia entre liviano y pesado, por eso tomé la decisión de agrandar los cojines y que tuvieran pesos precisos y diferentes. La otra decisión fue que los pudieran trasladar, no solo que los manipularan, sino que los trasladaran al momento del cierre de la actividad, para ordenarlos en los contenedores.
D1: ¿Cómo puedes notar esta diferencia?
A: Se notó la diferencia, que los que tomaban uno liviano, tomaban el cojín y lo movían para todos lados y, los que llevaban uno pesado con las dos manos les costaba más o hacían un mayor esfuerzo.
D1: ¿Cómo puedes precisar lo corporal y la noción masa en los niños?
A: En la manipulación que los niños hacen con el objeto, si para ellos era pesado o liviano, movían y manipulaban los cojines de manera diferente, ellos con el liviano hacían más movimientos cuando lo trasladaban o lo manipulaban, lo movían arriba abajo, a un lado y a otro. En cambio, los pesados los dejaban caer y escuchaban el ruido que hacía en el piso.

El tránsito de Ana por las etapas del ciclo ALACT, agudizan su capacidad para observar su práctica y analizar la segunda aplicación desde el punto de vista de los niños. Se clarifica su CC, interpretando que, a medida en que los niños requieren de mayor esfuerzo para transportar el cojín podrán asociar este esfuerzo con la cantidad de materia que tiene el cojín. Comprendiendo con esto, la base del aprendizaje intuitivo de la masa, característico de las propuestas de enseñanza idóneas para este tramo etario.

Ana aprecia que su propuesta tiene una mejora en el recurso manipulativo, lo que muestra un incremento en CPC-ENS. Además, es capaz de identificar que los niños aprenden la noción de masa en función de su propio cuerpo, a través de una serie de acciones motoras producto de la interacción experimental con los objetos. Esta observación, evidencia una mejor comprensión del aprendizaje infantil, como muestra de un mejoramiento de CPC-PMI.

DISCUSIÓN

El estudio permite confirmar lo propuesto por Ametler y Alsina (2017), evidenciando que el ciclo ALACT, a través de la reflexión, favorece un cambio de perspectiva del maestro que moviliza hacia la transformación en la enseñanza. Según los resultados vistos en el tránsito de Ana por las fases del ciclo ALACT, el punto crítico que permite este cambio de perspectiva se produce en (L) proceso de mirar hacia atrás y (A) proponer nuevas alternativas. El hecho de reconocer debilidad en su conocimiento de la trayectoria de aprendizaje de la magnitud masa en infantil (CC) ejerció un cambio positivo, mejorando la planificación e implementación de la actividad exploratoria que se ofreció a los niños, fortaleciendo la capacidad de enseñanza de la educadora.

El análisis de los puntos críticos que fueron observados en la práctica e identificados en el proceso de reflexión, favorecen una mirada crítica de las decisiones tomadas, potenciando en este caso, la capacidad de enseñanza de la maestra en formación. Este aspecto influye directamente en la noción de corporalidad o trabajo con los sentidos que debe ser desarrollada en infantil y que Ana profundiza en esta experiencia reflexiva.

En este sentido, el caso permite evidenciar un proceso reflexivo basado en el conocimiento del contenido masa, mostrando como una maestra reflexiona para tomar decisiones pedagógicas que le permiten mejorar los recursos manipulativos y la estructura de la actividad de enseñanza. De la misma forma que propone Belmonte Gómez (2005), Ana reorganiza la manera en que la percepción sensorial da una información sobre los atributos de los objetos. Así, asimila que la noción de magnitud masa se construye sobre procesos de aprestamiento sensorial donde el niño toma y decide si el objeto es pesado o liviano.

En el estudio de caso de Ana, se observan cambios importantes entre la primera y segunda implementación, dando cuenta de un incremento de las componentes CC, CPC-ENS y CPC-PMI de la capacidad de la enseñanza de la masa en infantil.

En el componente del CC, el cambio más notorio fue observado en la toma de decisiones con respecto a la representación de la masa en un material manipulativo apropiado a la edad de los niños.

En el componente de CPC-ENS, se observan cambios en la tarea, las instrucciones y la distribución del tiempo. En la segunda implementación, Ana favorece que los niños manipulen y exploren el atributo masa a través de la actividad motriz. La mejora del material en mayor cantidad permite ofrecer oportunidades de práctica matemática para todos los niños, a fin de que vayan elaborando sus representaciones personales sobre el atributo.

En el componente de CPC-PMI, Ana desarrolla una mejora de la comprensión de la propuesta para promover aprendizaje inicial de la masa, asociado a una exploración del atributo utilizando las características personales del cuerpo de los niños. Esta interacción motriz y el atributo permite una representación corporal para liviano o pesado, lo liviano es fácil de levantar y transportar porque tiene menos materia, mientras que lo pesado tiene mayor cantidad de materia, mayor masa y es difícil de levantar y transportar.

Dado que este estudio se situó en el último semestre de la formación de maestras de infantil, coincidimos con Parks y Wager (2015) y con Horm *et al.* (2013), reafirmando que la formación inicial no es suficiente para integrar teoría y práctica. Por una parte, la primera implementación presentada refleja los conocimientos adquiridos por Ana durante sus cuatro años de formación, la cual muestra debilidades de contenido, pedagógicas y relacionadas con el pensamiento infantil. La segunda implementación, formulada luego de un proceso reflexivo muestra cambios y mejoras en los tres aspectos, coincidiendo con Perrenoud (2004) en que la reflexión sobre la práctica debe ser un hábito dentro de la FID.

Al igual que Wood y Bennett (2000), el proceso de reflexión docente fue en Ana, un claro ejemplo para entender las posibilidades que otorga el análisis de la práctica misma, es decir, la recopilación de reflexiones y análisis de las propias prácticas educativas a través del ciclo ALACT. En la medida que Ana fue remirando su actuar y reflexionando junto a la comunidad docente, se va logrando un proceso de asimilación y acomodación de los conocimientos sobre el contenido y su enseñanza.

CONCLUSIONES

El trabajo muestra cómo la detección de puntos críticos en un proceso reflexivo de una maestra de infantil en formación, incita cambios en los conocimientos y prácticas de enseñanza. Se propone el constructo de *Capacidad de enseñanza de la matemática*, el cual ofrece una conceptualización de un saber profesional de referencia para la enseñanza de la magnitud masa en infantil. El análisis del caso de Ana, da luces sobre cómo actúa un ciclo de reflexión, mostrando cómo la reflexión ofrece andamiaje para el desarrollo de la capacidad de enseñanza, promoviendo conexiones entre el conocimiento y la práctica de enseñanza.

Los puntos críticos son detectados gracias al constructo de capacidad de enseñanza, por medio del análisis de los productos del ciclo de reflexión ALACT, mostrando cómo se va modificado la práctica, a medida que la maestra transita por el ciclo reflexivo. La reflexión personal en conjunto con las reflexiones de la comunidad docente, brindaron una serie de ideas y posibilidades para nutrir la toma de decisiones de la futura docente. De este modo, se puede decir que la reflexión en comunidad entrega herramientas para el desarrollo de estrategias en la solución de los problemas de la enseñanza de la magnitud masa en infantil.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación está financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile, ANID, a través Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, proyecto FONDECYT 1171076.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años*. Narcea.

Alsina, A., y Salgado, A. (2019). Descubriendo la medida en un contexto de interacción, negociación y diálogo: Un estudio de caso en Educación Infantil. *PNA 14*(1), 1-21.

Ametller, J., y Alsina, Á. (2017). ¿Qué aportan el aprendizaje reflexivo y la enseñanza dialógica a la formación permanente? Un primer análisis con profesorado de ciencias y matemáticas. *X Congreso Internacional sobre Investigación en didácticas de las Ciencias*. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/336783/427566

Arcavi, A., y Schoenfeld, A. H. (2008). Using the unfamiliar to problematize the familiar. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *8*, 280–295.

Belmonte Goméz, J. M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En Chamorro M. (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*, pp. 315-345. Pearson Educación.

Buysse, V., Winton, P. J. y Rous, B. (2009). Reaching consensus on a definition of professional development for the early childhood field. *Topics in Early Childhood Special Education*, *28*(4), 235-243. https://doi.org/10.1177/0271121408328173

Cantó, J., Pro Bueno A. y Solbes J. (2016). ¿Qué ciencias se enseñan y cómo se hace en las aulas de educación infantil? La visión de los maestros en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(3), 25-50. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1870

Clements, D. H., Battista, M. T. y Sarama, J. (1998). Development of geometric and measurement ideas. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 201-225). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Clements, D. H. y Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. En D. Clements, J. Sarama, y A. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 229-317). Erlbaum.

Clements, D. H. y Sarama, J. (Eds.). (2004). *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Lawrence Erloaum Associates Publishers.

Clements, D. H. y SaramA, J. (2005). Math play: How young children approach math. *Early Childhood Education Today*, *19*(4), 50–57.

Common Core State STandardS Initiative (2019). Mathematics Standards Kindergarten. Measurement & Data. http://www.corestandards.org/Math/Content/K/MD/

Goldrine T., Estrella S., Olfos R. , Cáceres P., Galdames X., Hernández H. y Medina V. (2015). Conocimiento para la enseñanza del número en futuras educadoras de párvulos: efecto de un curso de Didáctica de la Matemática. *Estudios Pedagógicos, 41*(1), 93-109. https://doi.org/10.4067/S0718-07052015000100006

Greenes, C. (1999). Ready to learn. En J. Cooper (Ed.), *Mathematics in the early years* (pp. 39-47). National Council of Teachers of Mathematics.

Greenes, C. Herbert, P. y Balfanz, R. (2004). Big Math for Little Kids. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*, 159–166.

Horm, D., Hyson, M. y Winton, P. (2013). Research on early childhood teacher education: Evidence from three domains and recommendations for moving forward. *Journal of Early Childhood Teacher Education*, *34*, 95-112. https://doi.org/10.1080/10901027.2013.758541

Kilday, C., y Kinzie, M. (2009). An Analysis of Instruments that Measure the Quality of Mathematics Teaching in Early Childhood. *Early Childhood Education Journal*, 4, 365–372. https://doi.org/10.1007/s10643-008-0286-8.

Korthagen, F. A. (2001). *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education.* LEA.

Korthagen, F. A. (2010). La práctica, la teoría y la persona en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *24*(2), 83–101. https://www.dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3276048

Leavy, A. y Hourigang, M. (2018). Using Lesson Study to Support the Teaching of Early Number Concepts: Examining the Development of Prospective Teachers' Specialized Content Knowledge. *Early Childhood Education*, *46*(47), 47–60. https://doi.org/10.1007/s10643-016-0834-6

Lehrer, R., Jaslow, L. y Curtis, C. (2003). Developing understanding of measurement in the elementary grades. En D Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and Teaching Measurement* (pp.100-121). National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación de Chile (2005). *Bases Curriculares de la Educacion Parvularia*. Maval.

Mora, J. M. (2007). Collaborative action research and project work: Promising practices for developing collaborative inquiry among early childhood preservice teachers. *Teaching and Teacher Education*, *23*(4), 418-431. https://doi.org/10.1016/0742-051X(94)00012-U

National Council of Teachers of mathematicS [NCTM] (2003). *Principles and standards for school mathematics*. https://www.nctm.org/standards

Olfos, R., Vergara, A., Estrella, S., y Goldrine, T. (2022). Impact of a theory-practice connecting scaffolding system on the ability of preschool teachers-in-training to teach mathematics. *Teaching and Teacher Education*, *120*(103887). https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103887

Olfos R., Goldrine T. y Morales S. (2019). Validación de un dispositivo para desarrollar la capacidad de enseñanza sobre la cuantificación en futuras Educadoras de Párvulos. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática* (pp. 17-50). Graó.

Parks, A. M. y Wager, A. A. (2015). What knowledge is shaping teacher preparation in early childhood mathematics? *Journal of Early Childhood Teacher Education*, *36*(2), 124-141. https://doi.org/10.1080/10901027.2015.1030520

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Grao.

Peter-Koop, A., y Grüssing, M. (2007). *Mit Kindern Mathematik erleben*. Kallmeyer.

Pizarro, N., Albarracín, LL. y Gorgorió, N. (2018). Actividades de estimación de medida: La interpretación de los docentes de Educación Primaria. *Bolema*, *32*(62), 1177–1197. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a21

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., Pérez, T. y Callejo de la Vega, M. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203-228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124

Sheridan, S. M., Edwards, C. P., Marvin, C. A. y Knoche, L. L. (2009). Professional Development in Early Childhood Programs: Process Issues and Research Needs. *Early education and development*, *20*(3), 377-401.

Schön, D. (2002). *La formación de profesionales reflexivos*. Paidós.

Simpson, A. y Linder, S.(2014). An Examination of Mathematics Professional Development Opportunities in Early Childhood Settings. *Early Childhood Education Journal*, *42*(5), 335–342.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *9*(2), 1-30. https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf

Sophian, C. (2004). Mathematics for the future: developing a Head Start curriculum to support mathematics learning. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 59-81.

Wood, E. y Bennett, N. (2000). Changing theories, changing practice: exploring early childhood teachers' professional learning. *Teaching and Teacher Education*, *16*(5-6), 635-647. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(00)00011-1

Autor de correspondencia

Tatiana Goldrine Godoy

Dirección postal: Avda. El Bosque 1290, Viña del Mar, Chile
tatiana.goldrine@pucv.cl

 https://doi.org/10.24844/EM3502.04

Elaboración de un instrumento para identificar prácticas pedagógicas en la enseñanza de la multiplicación

Development of a tool to identify pedagogical practices in teaching multiplication

Ximena Oyarzo Velásquez,[1] Sandra Burgos Henríquez,[2]
Montserrat Prat[3]

Resumen. Esta investigación se enmarca en un estudio exploratorio de las prácticas pedagógicas en el proceso de enseñanza de la multiplicación, guiado por profesores de enseñanza básica en Escuelas de la comuna de Puerto Montt, Chile. Considerando que los profesores son agentes de cambio para la educación, conocer sus prácticas pedagógicas resulta fundamental para aportar en su formación continua, así como en la formación inicial de los profesores de matemáticas. Este artículo presenta el diseño y la construcción de un instrumento que permite identificar las prácticas pedagógicas de la enseñanza de la multiplicación aplicadas a participantes docentes en activo. El instrumento se diseñó a partir de la revisión realizada de la estructura multiplicativa y de la enseñanza de la multiplicación y, está organizado en cuatro dimensiones: (1) Concepción de la didáctica de la matemática, (2) Metodología para la enseñanza de la multiplicación, (3) Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación y

Fecha de recepción: 16 de noviembre de 2020. **Fecha de aceptación:** 5 de diciembre de 2022.

[1] Universidad Austral de Chile, Sede Puerto Montt, Instituto de Especialidades Pedagógicas, Puerto Montt, Chile, ximena.oyarzo@uach.cl, orcid.org/0000-0002-3479-6903.

[2] Universidad Austral de Chile, Sede Puerto Montt, Centro de Docencia Superior en Ciencias Básicas, Puerto Montt, Chile, sandraburgos@uach. cl, orcid.org/0000-0002-7113-1919.

[3] Blanquerna-Universitat Ramon Llull, Facultat de Psicologia, Ciències de l'Educació i els Esports, Barcelona, España, montserratpm3@blanquerna.url.edu, orcid.org/0000-0002-8979-7663.

(4) Percepciones docentes sobre la enseñanza de las matemáticas. La validación del instrumento se realizó a partir del juicio de expertos, lo cual permite ajustarlo para que responda a los objetivos del estudio, los cuales son: (1) identificar las estrategias pedagógicas de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación que permite responder a la diversidad en el aula, (2) describir las concepciones que los profesores de Tercero Básico tienen sobre la multiplicación y, (3) caracterizar las prácticas pedagógicas que realizan los profesores de básica en la enseñanza de la multiplicación. La aplicación del instrumento muestra su potencial para la investigación y la intervención educativa.

Palabras clave: *diseño de instrumento, prácticas pedagógicas, profesores de enseñanza básica, enseñanza de la multiplicación, Formación del profesorado.*

Abstract. The research we present is part of an exploratory study of the pedagogical practices involved in the process of teaching multiplication as carried out by primary school teachers at schools in the Puerto Montt commune, Chile. Given that teachers are agents of change in education, an understanding of their pedagogical practices is necessary in order to contribute to their on-going training, as well as the initial training of mathematics teachers. This study presents the design and construction of an instrument that makes possible to identify the pedagogical practices applied by active teachers when teaching multiplication. The design of the instrument is based on the literature review of the multiplication and its teaching organised in four dimensions: (1) Conception of the didactics of mathematics, (2) Methodology for teaching multiplication, (3) Difficulties in the multiplication learning process and (4) Teachers' perceptions about mathematics teaching. The validation of the instrument was carried out by peer review, which enabled its adjustment to meet the goals of the study, which are: (1) Identify the pedagogical strategies for teaching and learning multiplication that allow facing classroom diversity, (2) Describe Third Grade teachers' conceptions about multiplication, and 3) Characterise pedagogical practices carried out by elementary school teachers in multiplication teaching. The application of the instrument has demonstrated its potential for research and educational intervention

Keywords: *instrument design, pedagogical practices, primary education teachers, multiplication teaching, teacher training.*

1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo se desprende de un estudio exploratorio cuyo objetivo es identificar las fortalezas y necesidades sobre el proceso de enseñanza de la multiplicación en Escuelas Básicas de la comuna de Puerto Montt (Chile), en el marco de un proyecto DID financiado por la Dirección de Investigación y Desarrollo de la Universidad Austral de Chile (2019). El estudio indaga en la visión de los procesos matemáticos de los docentes, lo que permite no solo conocer la realidad de las aulas, sino que también posibilita una formación continua que se ajuste a la realidad existente. Concretamente, este texto propone un instrumento para el estudio de este fenómeno.

Como formadoras de profesores, docentes de formación permanente y, especialmente, como investigadoras en educación matemática y, conociendo que el dominio de la multiplicación es clave para el aprendizaje de otros contenidos matemáticos (por ejemplo: división, múltiplos y divisores, proporcionalidad, conceptos de área y volumen, o cálculo de la media aritmética, etc.), nos preguntamos sobre la existencia de una visión compartida de la multiplicación por parte de los maestros en servicio que también tenga en cuenta los modos en los cuales se aborda la enseñanza de la multiplicación en la enseñanza básica. De ahí nos cuestionamos: ¿cómo se presenta el proceso de la multiplicación? y ¿cómo se minimizan las barreras para su aprendizaje?, entre otras. Las cuales consideramos son de utilidad para conocer no solamente la realidad de las aulas respecto al aprendizaje de la multiplicación, sino también la propia práctica pedagógica y la mirada de los profesores sobre las dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación que presentan los estudiantes y, así visualizar fortalezas y debilidades en la enseñanza y aprendizaje de dicho concepto.

Con el fin de contribuir a la formación continua tanto de docentes en ejercicio, como en formación, nos proponemos el diseño y construcción de un instrumento *ad hoc* que permita identificar las prácticas pedagógicas utilizadas por profesores en activo para la enseñanza de la multiplicación, y se espera que, más allá de este estudio, con este instrumento se estimule a otros investigadores a potenciar en los docentes reflexiones pedagógicas sobre su práctica educativa.

2. MARCO CONCEPTUAL

Según los Estándares Estatales Básicos Comunes para Matemáticas (CCSSM, por sus siglas en inglés), la competencia matemática requiere de comprensión conceptual, la cual incluye la comprensión, de las operaciones y de las relaciones matemáticas; de la fluidez en los procedimientos, entendida como el uso flexible de la estrategia adecuada para encontrar la respuesta de manera eficiente, y de una disposición productiva hacia las matemáticas, considerándolas como un conocimiento útil (CCSSM, 2010).

Desde esta perspectiva, los docentes deben abordar la enseñanza de la multiplicación en sus aulas siendo conscientes de las conexiones que tiene este concepto con otras áreas de las matemáticas. De este modo, se debe asegurar que los estudiantes inicien su aprendizaje con los conocimientos necesarios para la comprensión de este concepto, con la vista puesta en las posibilidades que un buen aprendizaje conceptual ofrece a sus experiencias matemáticas futuras. Sin embargo, hay estudios que demuestran que la comprensión conceptual de la multiplicación sigue siendo débil y que muchos alumnos aún afrontan la multiplicación desde un punto de vista puramente memorístico (Dubé y Robinson, 2018).

Dado que la conexión más fuerte en la multiplicación es con el valor posicional y las estructuras aditivas, cuando iniciamos la multiplicación con dos cifras es necesaria una adecuada comprensión del valor de posición (Van de Walle *et al.*, 2014). Un buen planteamiento en el aula por parte de los docentes, aunando la comprensión de la multiplicación con una base sólida del valor de posición, haría posible que, una vez introducida la multiplicación con números naturales, la multiplicación con decimales (por ejemplo, 4 x 7.56, o 0.34 x 9.5) no requiera de nuevas habilidades o conocimientos para su comprensión, más allá de la conexión entre el valor posicional y la multiplicación (Van de Walle *et al.*, 2014). Por otra parte, la multiplicación tiene también una fuerte conexión con el álgebra, pues son justamente los patrones, tanto numéricos como geométricos, los que ayudan a entender y elaborar con sentido las tablas de multiplicar.

2.1. La estructura multiplicativa

Comprende conceptos relacionados tanto con la multiplicación como con la división. Estos conceptos se encuentran presentes en diversos ámbitos, siendo necesarios y fundamentales en actividades de tipo social, cultural y científico (Castro y Ruiz, 2011). Autores como Orozco (2018) abordan los puntos diferenciadores para la estructura multiplicativa, tales como la operación mental, las tablas de multiplicar, los algoritmos y la resolución de problemas. La multiplicación es un contenido matemático de numeración central, en tercer curso de básica en varios países (Castro y Ruiz, 2011; CCSSM, 2010). En Chile, el eje de Números y Operaciones abarca la destreza en el cálculo mental y escrito, construyendo conceptos básicos, con ayuda de metáforas y representaciones donde se involucra la multiplicación (MINEDUC, 2012).

La multiplicación se introduce tradicionalmente en las aulas de primaria como una suma reiterada o repetida de elementos iguales (Castro y Castro, 2010; Fernández, 2007; Flores *et al.*, 2015, entre otros), es decir, se introduce siguiendo la teoría implícita formalizada por Fischbein *et al.* (1985), según la cual cada operación aritmética tiene asociado un modelo implícito, y el de la multiplicación es la adición repetida. En este sentido, para iniciar el proceso de enseñanza de la multiplicación de los números naturales, es necesario asegurar que los alumnos dominen la estructura aditiva (Flores *et al.*, 2015)

Multiplicar, no obstante, va más allá de una adición reiterada. La suma no es una multiplicación, ya que en las situaciones sumativas solo interviene un conjunto de elementos (manzanas y manzanas; libros y libros), mientras que en las situaciones multiplicativas aparecen dos conjuntos claramente definidos, y en relación constante (cajas y manzanas, estanterías y libros) (Fernández, 2007). Así pues, la suma reiterada es diferente a la multiplicación, al requerir la multiplicación de pensamiento jerárquico (Clark y Kamii, 1996).

La idea por desarrollar acerca de la multiplicación puede basarse también en la relación entre las dos estructuras multiplicativas: multiplicación y división. Este es el caso del National Council of Teachers of Mathematics –NCTM (2000), para el cual el aprendizaje de la multiplicación y la división debe iniciarse desde la comprensión de situaciones que impliquen multiplicar, tales como el agrupamiento entre iguales; o bien, que impliquen dividir, distribuyendo objetos reales en partes iguales (NCTM, 2000).

Por lo que respeta a los problemas multiplicativos se expresan habitualmente en la escuela de primaria como una relación ternaria ($a \times b = c$), cuando en realidad se trata de una relación cuaternaria (Vergnaud, 1991). Esta relación cuaternaria, según Vergnaud (1991), puede representarse mediante una tabla de correspondencia que traduce el isomorfismo entre dos tipos de medida o cantidades. Trabajar con este tipo de representación permite dejar a un lado la parte operativa de la multiplicación para trabajar la parte más conceptual.

2.2. El proceso para la enseñanza de la multiplicación

Para algunos profesores de básica, la enseñanza de la multiplicación se centra en el dominio del algoritmo convencional y su posterior aplicación para resolver problemas. Estos profesores esperan que los alumnos dominen las tablas de multiplicar (hasta el 10), al comienzo de la enseñanza básica, siendo este dominio un prerrequisito para la utilización de la multiplicación y de la división (Stare, 2010). No obstante, investigaciones sobre el aprendizaje de la multiplicación señalan que una buena parte de los alumnos de este nivel, e incluso de enseñanza media, presentan dificultades y cometen errores al realizar esta operación de manera algorítmica (Dickson *et al*, 1991; Kamii, 1995). Esto puede deberse a que se enseña explicando y pidiendo a los alumnos que repitan una serie de procedimientos, aparentemente, con el único fin de que sean capaces de reproducirlos, sin traducirse en una comprensión real de ideas y procedimientos matemáticos (Boqué *et al*, 2016; Thompson y Saldanha, 2003; entre otros).

El proceso para el aprendizaje de la multiplicación ha sido abordado por diferentes autores desde diversas perspectivas. Así, autores como Flores *et al*. (2015) establecen etapas para culminar el proceso de aprendizaje de las operaciones multiplicativas: de acción, de uso de modelos, de simbolización, de hechos numéricos y tablas, de uso de algoritmo y de aplicación a la resolución de problemas. Por otro lado, autores como Fernández (2007) establecen, también, etapas en el proceso didáctico de la iniciación a la multiplicación, aunque dando un valor clave en dicho proceso a comprender el significado del concepto "veces" en un contexto multiplicativo.

Desde otra perspectiva, el NCTM (2000) pone el acento en la modelización de problemas o situaciones multiplicativas con diagramas, dibujos o material concreto de modo que los alumnos entiendan qué representan los factores y su producto en contextos y registros distintos. En este sentido, Duval (2006) expone que la actividad matemática se realiza en un contexto de representación semiótica (registros de representación), aunque los estudiantes deben ser capaces de reconocer un mismo objeto matemático, en este caso la multiplicación, en diferentes contextos de representación y saber usarlos. Así pues, es importante conseguir que los alumnos desarrollen la coordinación interna de los distintos contextos de representación de un mismo objeto para que puedan ser elegidos y usados según el propósito de la actividad (Duval, 2006). De manera similar, el CCSSM (2010) establece que en tercero básico, los alumnos deben desarrollar la comprensión del significado de la multiplicación y la división de números enteros mediante actividades y problemas con grupos, disposiciones y modelos de área de la misma medida. De este modo, se acompaña a los alumnos en la aplicación de propiedades de las operaciones en el cálculo de productos de números enteros, potenciando la aplicación de estrategias que puedan ser desarrolladas por ellos mismos. Al comparar las diferentes estrategias usadas para conseguir la solución, los alumnos aprenden la relación entre ambas estructuras multiplicativas.

Otra de las aproximaciones de la multiplicación consiste en las propuestas que siguen la secuencia Concreto-Representación-Abtracto (CRA) basada en los estadios de Bruner (1966): en activo, icónico y simbólico. La secuencia CRA ha demostrado ser un procedimiento de enseñanza útil, en particular por su uso de múltiples representaciones. Siendo un método efectivo para la enseñanza de la multiplicación y la división en alumnos con dificultades de aprendizaje (Milton *et al.*, 2018).

A partir de las distintas perspectivas existentes y propuestas didácticas para el aprendizaje de la multiplicación, puede establecerse que es importante el apoyo de modelos (diagramas, suma repetida de grupos iguales, área, etc.) para iniciar el aprendizaje de la multiplicación desde la comprensión. En ese sentido, se tiene presente que este proceso de aprendizaje no puede iniciarse sin una comprensión del sistema de valor posicional y de las estructuras aditivas. El aprendizaje de la multiplicación requiere también descubrir sus propiedades, mediante estrategias basadas en estas propiedades y resolver problemas con multiplicaciones y divisiones. A todo esto, es preciso añadir el papel del álgebra en el descubrimiento de regularidades, es decir, de patrones, que serán importantes para un adecuado aprendizaje de la multiplicación, por ejemplo, estudiando la regularidad en los dobles, triples, etcétera; los cuales aportan en la comprensión y construcción de las tablas de multiplicar. Todo el proceso requiere de la comunicación matemática como camino para compartir y clarificar ideas, puesto que las conversaciones sobre ideas matemáticas desde distintas perspectivas permiten a los participantes compartir, discutir, perfeccionar o rectificar sus conceptos matemáticos, además, de hacer conexiones y desarrollar un lenguaje que permita expresar sus ideas matemáticas, potenciando así la necesidad de precisión en sus intervenciones (NCTM, 2000).

3. ESTADO DE LA CUESTIÓN

En Chile, desde hace algunos años existen instituciones y normativas que buscan garantizar calidad y equidad en los aprendizajes de todos los niños y jóvenes (Agencia de Calidad y Superintendencia de Educación, 2011). En este nuevo contexto, los programas de estudio ofrecen una organización temporal de los objetivos de aprendizaje (secuencia recomendada de objetivos, indicadores de logro y evaluación, etc.), los cuales deben cumplirse durante el año escolar, con el fin de conducir la tarea didáctica a los profesores.

El currículum de matemáticas en Chile se estructura en cinco ejes temáticos para la enseñanza básica: Número y operaciones, Geometría, Medida, Patrones y álgebra y, Datos y probabilidad (MINEDUC, 2012, p. 218). Dentro de este plan, la enseñanza de la multiplicación se aborda en el eje de Números y operaciones. La trayectoria curricular se inicia en primero básico, concretamente en el objetivo de aprendizaje que propone "determinar las unidades y decenas en números de 0 al 20, agrupando de a 10, de manera concreta, pictórica y simbólica" (MINEDUC, 2012, p. 45). En segundo básico, el concepto de multiplicación aparece en el currículum de forma concreta en el objetivo de aprendizaje que busca "demostrar que comprenden la multiplicación usando representaciones concretas y pictóricas, expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales..." (MINEDUC, 2012, p. 42). Finalmente, todo parece indicar que la trayectoria curricular de la enseñanza de la multiplicación concluye en tercero básico, cuando se plantea que los estudiantes deben:

> Demostrar que comprenden las tablas de multiplicar hasta el 10 de manera progresiva: usando representaciones concretas y pictóricas; expresando una multiplicación como una adición de sumandos iguales usando la distributibilidad como estrategia para construir las tablas hasta el 10 aplicando los resultados de las tablas de multiplicar hasta 10x10 sin realizar cálculos, resolviendo problemas que involucren las tablas aprendidas hasta 10. (MINEDUC, 2012, p. 235)

De esta forma, se podía afirmar que las bases curriculares del sistema educacional chileno no están en la mera repetición y mecanización de algoritmos, definiciones y fórmulas, sino que contemplan una práctica docente que tienda a favorecer la comprensión de conceptos matemáticos. La metodología de trabajo de las matemáticas en este currículum busca la adquisición de los conceptos, presentando situaciones desafiantes que requieren variadas habilidades, destrezas y conocimientos. Al mismo tiempo, esta metodología busca desarrollar las capacidades cognitivas declaradas en los planes y programas, las cuales son visualizar, representar, modelar y resolver problemas, simular y conjeturar, reconocer estructuras y procesos.

4. METODOLOGÍA

El instrumento de recogida de datos es una entrevista semiestructurada, pues permite al investigador-entrevistador clarificar de antemano los temas a tratar, sin abandonar la posibilidad de modificar la secuencia de preguntas en el transcurso de la entrevista, en función de las respuestas que vayan obteniendo de los participantes (Cohen *et al.*, 2018). Para mayor riqueza en el proceso de recogida de datos se cuenta con un protocolo de la entrevista, el cual se preparó por el equipo de investigación que, a la vez, actúa como guía para las investigadoras que entrevistan a los participantes.

Para la investigación de donde emana este artículo, las entrevistas se realizaron individualmente, a cada maestro participante, en un área abierta y tranquila, adyacente a las aulas donde los maestros se desempeñan. Los participantes fueron 17 profesores. Cada una de ellas duró alrededor de 30 a 35 minutos y fueron registradas en audio para su posterior transcripción.

El diseño y construcción del instrumento contempló seis etapas: (1) revisión de estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación; (2) identificación de los aspectos relacionados con el aprendizaje de la multiplicación que debían abordarse en la entrevista; (3) análisis del tratamiento otorgado a la multiplicación y su enseñanza en el currículo; (4) construcción de la versión piloto del instrumento; (5) validación del instrumento y, (6) construcción de la versión final del instrumento. El proceso de diseño del instrumento corresponde a las fases 1, 2 y 3; mientras que las fases 4, 5 y 6 corresponden a su construcción y validación.

4.1. Versión piloto del instrumento

La entrevista se estructuró a partir de cuatro dimensiones, las cuales fueron inicialmente planteadas a partir de los objetivos del proyecto en el que se enmarca este estudio. Estas son: (i) Concepción de la didáctica de la matemática; (ii) Metodología usada para la enseñanza de la multiplicación; (iii) Resultados del proceso y; (iv) Concepción de la enseñanza de las matemáticas. Una vez establecidas estas dimensiones a partir de los antecedentes de la literatura, se elabora el primer protocolo de preguntas (versión piloto). La tabla 1 muestra la descripción de las dimensiones iniciales y una muestra de las preguntas para cada dimensión planteadas inicialmente.

Tabla 1. Dimensiones y muestra de las preguntas iniciales (versión piloto)

Dimensión	Descripción	Ejemplo de pregunta
Concepción de la didáctica de la matemática.	Se identifica cómo el profesor anticipa las formas de pensar de los estudiantes; cómo interpreta sus producciones y qué lenguaje matemático utiliza, además, cómo identifica y aprovecha las fortalezas y dificultades en el aprendizaje de contenidos matemáticos (Aguilar *et al.*, 2015).	¿Utiliza en el aula material concreto de matemáticas? ¿Cuál? Puede explicar ¿cómo utiliza el material concreto y en qué contenidos?
Metodología para la enseñanza de la multiplicación.	Se describe cómo el profesor aborda la enseñanza de la multiplicación en el aula de matemáticas. Esto implica conocer el funcionamiento y la dinámica de aula en el proceso de enseñanza de la multiplicación: "un método, un proceso, una rutina o un algoritmo" (Orton, 2003) y la motivación a partir de situaciones de la vida cotidiana, usando material manipulativo.	¿Cómo introduce el tema de la multiplicación?
Resultados del proceso.	Se analizan los procesos de enseñanza-aprendizaje tal como ocurren en las salas de clase, con el fin de comprender los procesos pedagógicos que subyacen a los resultados alcanzados por los estudiantes. (Galton *et al.*, 1999).	¿Cree usted que hay una diferencia entre la enseñanza de la multiplicación de años atrás y en la actualidad?
Concepción de la enseñanza de las matemáticas.	Se detallan los conocimientos previos relacionados con las ideas acerca de cómo deben enseñarse las matemáticas, y el modelo didáctico que adopta el profesor/a. Se consideran estos conocimientos como constructos cognitivos que se han adquirido y son producto de los procesos de aprendizaje que el profesor ha recorrido en su formación, tal como afirma Llinares (1998).	¿Cuál cree que son sus competencias para enseñar la multiplicación?

Nota: Esta tabla muestra las dimensiones iniciales que se consideraron a partir de los referentes teóricos y de los objetivos del proyecto.

4.2. Validación del instrumento

Para la validación del instrumento se consideró la participación de expertos en Didáctica de las Matemáticas de Chile y España, quienes fueron seleccionados por su conocimiento especializado en la enseñanza de las matemáticas. Para llevar a cabo este proceso, los participantes disponían de la versión piloto del instrumento. La puesta en común con los expertos permitió identificar algunos aspectos a mejorar en los distintos elementos evaluados:

- La pertinencia de las dimensiones presentadas.
- La coherencia de las preguntas para cada dimensión.
- El protocolo de la entrevista.

El aporte de los expertos respecto a las preguntas del instrumento se organiza en dos bloques. Por un lado, están los aportes referentes a la pertinencia de las dimensiones y de las preguntas que se formulan en cada dimensión, y, por otro lado, las mejoras en el protocolo de la entrevista.

4.2.1. Aportes acerca de la pertinencia de las dimensiones y de las preguntas en cada dimensión.

La discusión sobre el nombre y el contenido de cada dimensión, la pertinencia del contenido de las distintas dimensiones, y la secuencia de preguntas hizo necesario replantear las dimensiones *Resultados del proceso* y *Concepción de la enseñanza de las matemáticas*, al observarse que el contenido de ambas es muy similar. Por lo tanto:

- La dimensión *Resultados del proceso*, pasa a tratar las *Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación*, sobre todo en la comprensión que presentan los estudiantes.
- La dimensión *Concepción de la enseñanza de las matemáticas*, pasa a denominarse *Percepción docente sobre la enseñanza de las matemáticas* para los docentes participantes.

Respecto a las preguntas para cada dimensión:

- En la dimensión *Concepción de la didáctica de la matemática*, se agregó una pregunta para complementar la recogida de la información: ¿Dónde conoció dichos materiales?
- En la dimensión *Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación*, se sugirió agregar preguntas de materiales/estrategias concretas que utilizan los estudiantes relatando acciones pedagógicas que presentan éxito y fracaso en la enseñanza y comprensión de la multiplicación.

En la tabla 2, se observan los cambios respecto al nombre de las dimensiones y al número de preguntas para cada una, proceso que se llevó a cabo después de la validación.

Tabla 2. Evolución de las dimensiones y el número de preguntas

Dimensión fase inicial	Nº preguntas	Dimensiones fase final	Nº preguntas
Concepción de la didáctica de la matemática	5	Concepción de la didáctica de la matemática (CoDiMa)	6
Metodología para la enseñanza de la multiplicación	8	Metodología para la enseñanza de la multiplicación (MeEnMul)	8
Resultados del proceso	10	Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación (DifAprMul)	11
Concepción de la enseñanza de las matemáticas	2	Percepción docente sobre la enseñanza de las matemáticas (PerDoMa)	4

Nota: Esta tabla muestra la evolución de las dimensiones tanto a nivel de contenido como a su peso en la entrevista.

4.2.2. Aportes acerca del protocolo de la entrevista

Las mejoras que se consensuaron después del juicio y discusión con los expertos se concretan en lo siguiente:

- Incluir en el protocolo de la entrevista preguntas acerca del perfil del profesor entrevistado, de manera que dichas preguntas complementen y aporten información para el análisis. Así, se propone incluir preguntas que tengan relación con los estudios realizados, capacitaciones, años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas, tipo de institución en la que imparte/ha impartido docencia el profesor (pública o particular subvencionado), además de su participación en algún cargo en el área de matemáticas.

  Revisar las notas del entrevistador del protocolo de la entrevista, asegurando que no se realicen preguntas que puedan inducir una respuesta que no corresponda con la realidad u opinión del entrevistado. Esto, con el fin de evitar que el profesor responda lo que cree que se espera de él.

4.3. Instrumento de recogida de datos

La entrevista a los profesores del estudio es el instrumento utilizado para la recogida de datos de la investigación. Incluye instrucciones dirigidas al investigador-entrevistador para asegurar un buen proceso de recogida de datos, además las preguntas se organizan a partir de las dimensiones revisadas y refinadas siguiendo los comentarios de los expertos (tablas 3 y 4, respectivamente). Dicha organización responde al imperativo del objetivo principal de la investigación, el cual se plantea "Determinar si las prácticas pedagógicas que emplean los docentes de Tercero Básico para la enseñanza de la multiplicación en establecimientos educacionales de la comuna de Puerto Montt, responden a la diversidad en el Aula" (Proyecto Interno, UACh, p. 9).

Tabla 3. Dimensiones definitivas del instrumento *ad hoc*

Dimensión	Descripción
Concepción de la didáctica de la matemática (CoDiMa)	Se identifica de qué manera el profesor toma decisiones en su sala de clase de matemáticas, qué uso hace de las diferentes estrategias de aprendizaje, qué tipología de ejemplos considera interesantes, y las analogías y recursos didácticos que utiliza.
Metodología para la enseñanza de la multiplicación (MeEnMul)	Se describe la metodología usada por el profesor para enseñar la multiplicación a partir del uso de materiales manipulativos, ya sea mediante un reto o un procedimiento algorítmico.
Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación (DifAprMul)	Se analizan las respuestas de los profesores referidas al papel del error en el proceso de aprendizaje de la multiplicación y ~~conocer~~ su visión sobre las dificultades de sus alumnos en el aprendizaje de esta operación básica.
Percepción docente para la enseñanza de las matemáticas (PerDoMa)	Se describe cómo se ven los propios docentes como profesores de matemáticas, cómo se sienten enseñando matemáticas y qué puntos fuertes creen tener.

Nota: Esta tabla muestra las dimensiones definitivas a partir de las cuales se realiza el estudio.

A continuación se menciona cada dimensión con sus distintos niveles de comprensión:

- Desde una perspectiva general, la dimensión Concepción de la didáctica de la matemática trata sobre la noción que tienen los docentes participantes

acerca de la didáctica de la matemática, lo cual vendría a ser la concepción ontológica que se maneja de la multiplicación, es decir ¿en qué consiste?
- La dimensión Metodología para la enseñanza de la multiplicación indaga sobre el conjunto de métodos que utilizan los profesores. Por lo tanto, se pregunta por el modo en el cual la multiplicación se concibe epistemológicamente, es decir ¿cómo debe ser abordada?
- En la dimensión Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación, se busca visualizar cómo se realiza el proceso de comprensión de la multiplicación, correspondiendo entonces a un nivel concreto, en donde aparecen técnicas y formas de operacionalizar la multiplicación.
- La siguiente dimensión, Percepción docente para la enseñanza de las matemáticas indaga sobre nociones subjetivas o intersubjetivas que los entrevistados puedan tener de la enseñanza de la matemática en sí.

4.4 Protocolo de la entrevista, proyecto de investigación

El protocolo para el investigador-entrevistador incluye la información necesaria que debe conocerse para la identificación del entrevistado y el guión de preguntas. Así, antes de iniciar la entrevista, el investigador-entrevistador debe anotar los datos siguientes: fecha y hora de entrevista, lugar de la entrevista, nombre del entrevistador, nombre del profesor(a), establecimiento educacional. Además, se consigna la siguiente información: duración de la entrevista y observaciones que considerara remarcables de la entrevista (incidentes, comentarios generales, interrupciones, etcétera.).

El investigador-entrevistador toma notas de campo y busca asegurar que todas las entrevistas se desarrollen de manera similar. Por ende, se solicita el uso de grabadora de voz, se propone el texto con el que debe iniciarse la entrevista para su posterior transcripción, además de explicitar el modo de presentación y de despedida que debe seguir el investigador-entrevistador. También se explicitan los detalles de la entrevista que debe conocer el entrevistado para poder dar la autorización para que la entrevista sea grabada. Finalmente, en las preguntas de la entrevista, las notas para el entrevistador sirven para que el proceso de entrevista se desarrolle con fluidez.

Tabla 4. Preguntas del protocolo de la entrevista organizadas por dimensiones

CoDiMa
1. ¿Utiliza material concreto en el aula de matemáticas?
2. Si su respuesta es afirmativa ¿Podría mencionar algunos de ellos?
3. Si su respuesta es afirmativa ¿En qué contenidos utiliza preferentemente el material concreto?
4. Para el eje Números y operaciones ¿utiliza material? ¿de qué tipo? (En general.)
5. En el caso de utilizar material concreto en el eje de Números y operaciones, ¿puede explicarme cómo lo utiliza?
6. En el caso de utilizar material concreto en el eje de Números y operaciones, ¿Dónde conoció el material que utiliza? (Curso, libros, colegas, capacitación.)
MeEnMul
1. ¿Cuántas veces ha enseñado el concepto de multiplicación en los últimos 5 años?
2. En el caso de haber introducido la multiplicación en su experiencia docente ¿Cómo introduce este tema? ¿Puede darme un ejemplo?, o ¿puede mostrarme cómo la introduce?
4. Si su respuesta ha sido afirmativa ¿Podría explicar cómo continúa hasta lograr la comprensión de la multiplicación?
5. Si su respuesta ha sido afirmativa ¿Qué materiales, recursos o actividades utiliza para lograr esta comprensión?
6. ¿Han cambiado sus ideas acerca de cómo enseñar el concepto de multiplicación en estos años?
7. Si su respuesta es afirmativa ¿cómo se generó el cambio? ¿Qué cosa específica le hizo cambiar de idea?
8. Si su respuesta ha sido afirmativa ¿Puede recordar alguna experiencia que haya contribuido a dicho cambio?
DifAprMul
1. ¿Cree usted que hay una diferencia entre la enseñanza de la multiplicación hace algunos años atrás y en la actualidad? ¿Puede dar un ejemplo?
2.
3. ¿Cuáles son las dificultades que ha observado en sus estudiantes en el proceso de comprensión de la multiplicación?
4. En el caso de observar dificultades en los estudiantes en la multiplicación, ¿puede describirnos los materiales y/o estrategias que utiliza en cada caso?
5. ¿Cómo han sido los resultados de aprendizaje en la comprensión de la multiplicación?
6. Si ha obtenido resultados exitosos ¿a qué lo atribuye?
7. Si ha tenido fracasos en la comprensión de la multiplicación ¿a qué lo atribuye? ¿Qué estrategia o estrategias utiliza para combatir el error?
En los casos donde se evidencia fracaso de los resultados de aprendizajes en la comprensión de la multiplicación
8. ¿Qué estrategias utiliza para potenciar la comprensión de la multiplicación? ¿Puede dar un ejemplo?
9.
10. ¿Qué estrategias utiliza para combatir el error en proceso de aprendizaje de la multiplicación?
11. ¿Cuál cree usted que es el rol del profesor de aula en la enseñanza de la multiplicación en estos casos dónde se presentan dificultades en la comprensión de la multiplicación?
PerDoMa
1. ¿Cómo se siente enseñando matemática? Nos puede responder en una escala de 1 a 7. ¿Por qué?
2. Dentro de los contenidos de matemática, ¿cuál le gusta más enseñar?
3. ¿Cuál o cuáles cree que son sus competencias para enseñar la multiplicación?
4. ¿Cuál o cuáles cree que son sus debilidades en la enseñanza de la multiplicación?

Nota: Esta tabla muestra el instrumento final organizado por dimensiones.

5. RESULTADOS

5.1 Respecto del instrumento (entrevista semiestructurada)

El instrumento elaborado abordó temáticas propias del desarrollo profesional docente, identificando conceptos como material didáctico, prácticas pedagógicas, didáctica de la matemática, enseñanza de la multiplicación, dificultades en los resultados de aprendizaje de la multiplicación, percepción docente, entre otras. Todos estos elementos resultaron relevantes para propiciar una reflexión docente. La elaboración del instrumento se piensa como una oportunidad de ofrecer a la comunidad educativa y académica un instrumento confiable, el cual produjo resultados estables y consistentes y que, al mismo tiempo, permitió identificar y analizar prácticas pedagógicas de los profesores de matemáticas en enseñanza básica.

En un primer estudio, el instrumento fue aplicado a 17 profesores de enseñanza básica, pudiéndose observar su potencial como instrumento para su uso en el contexto nacional (Chile), como base para el desarrollo de futuras investigaciones en el campo de desarrollo docente y su práctica pedagógica en el área de Matemática. A pesar del potencial mostrado por el instrumento, no se pudo legitimizar, de momento, debido a la muestra de profesores de este primer estudio, por lo que se trata de un instrumento válido para el contexto de esta investigación.

A partir de los resultados preliminares obtenidos en la aplicación del instrumento, se tuvo una primera aproximación por medio de la recogida de la información. Tales resultados, si bien aún parciales, aportaron una visión inicial.

5.2 En relación con las dimensiones consideradas en el instrumento de recogida de datos

En el análisis a las respuestas dadas por los profesores de la dimensión CoDiMA acerca del uso de materiales didácticos en las aulas, observamos entre otros aspectos que:

- El material didáctico al que se refirieron los profesores fue muy diverso, desde palitos de helado o plastilina, hasta ábacos o regletas. Así pues, para futuras investigaciones es necesario definir qué se entiende como material didáctico en el estudio.
- Los profesores utilizaron el material principalmente con alumnos con dificultades. Así indicaron, por ejemplo, "lo uso cuando los alumnos no entienden".

- Los profesores no detallaron cómo se utiliza el material en sus aulas, así indicaron que "presento el material y doy instrucciones" o "los alumnos manipulan el material".
- Los profesores indicaron que conocieron el material en textos escolares, capacitaciones del método Singapur, en conversaciones con los compañeros, etcétera.

En el análisis de la dimensión MeEnMul, observamos, entre otros aspectos, que:

- La mayoría de los profesores introdujeron la multiplicación como una suma reiterada y, en ningún caso se refirieron a estructura de matriz o de área;
- el aprendizaje de las tablas de multiplicar fue considerado esencial, por parte de los profesores, en el aprendizaje de la multiplicación, y
- los profesores conocen materiales manipulativos para introducir y reforzar la multiplicación, pero parecieron no sentirse cómodos con su uso en las salas de clase.

Respecto a las respuestas de los profesores a la dimensión DifAprMul acerca de las dificultades que presentaron los alumnos en el aprendizaje de dicha operación, vemos entre otros aspectos que:

- Concibieron como una de las principales dificultades la falta de memorización de las tablas de multiplicar. No se plantearon las dificultades desde una perspectiva conceptual, sino procedimental.

Finalmente, respecto a las respuestas dadas por los profesores del estudio a la dimensión PerDoMa, la cual aborda cómo se sienten los profesores como docentes de matemáticas, se observa, entre otros, que:

- Buena parte de los profesores, concretamente 12 de los 17, se puntuaron con 7 (8 profesores) o 6 (4 profesores). Justificaron sus respuestas con argumentos como: "me encantan las matemáticas", "considero que soy buena profesora", o similares.
- La mayoría de los entrevistados eligieron la numeración como el contenido matemático que preferían enseñar (10 de 17); mientras que la geometría fue el contenido elegido en segundo lugar (5 de 17).

- Indicaron que para la enseñanza de la multiplicación les gustaba trabajar "con material concreto" aunque no especificaron a qué se referían exactamente.
- Respecto a sus puntos débiles sobre la enseñanza de la multiplicación son variados, pero principalmente tienen que ver con la falta de estrategias en un sentido didáctico.

6. REFLEXIONES FINALES

El instrumento elaborado ha permitido observar el potencial que implica tener una herramienta que permita explorar el conocimiento matemático-didáctico de los profesores de matemáticas de primaria sobre la enseñanza de la multiplicación. En el proceso ha sido imprescindible la revisión de la literatura existente sobre la enseñanza de la multiplicación. El juicio de expertos ha permitido ajustar y mejorar el instrumento de manera que recogiera convenientemente el objetivo planteado en este estudio en específico.

Las diversas etapas seguidas en el proceso determinaron el diseño y construcción del instrumento, consolidando teóricamente las dimensiones definitivas: (1) Concepción de la didáctica de la matemática; (2) Metodología para la enseñanza de la multiplicación; (3) Dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación y; (4) Percepción docente para la enseñanza de las matemáticas.

Asimismo, la primera aplicación del instrumento ha posibilitado observar su potencial para abordar el estudio que nos propusimos llevar a cabo, los datos obtenidos, aunque preliminares, mostraron las posibilidades del instrumento, permitiendo identificar las metodologías que siguen los profesores para enseñar la multiplicación o, la visión sobre las dificultades en el proceso de aprendizaje de la multiplicación de los profesores participantes.

Así, consideramos interesante destacar algunos de los resultados obtenidos en el contexto de nuestro estudio. Vemos que los profesores participantes muestran ideas preconcebidas acerca de lo que son las matemáticas y de cómo deben enseñarse, por ejemplo: tienen la idea que las matemáticas son una actividad individual, que parece depender casi en exclusiva del propio alumno y de su esfuerzo para aprenderse las tablas de multiplicar. Es interesante observar el papel principal que otorgan a las tablas de multiplicar y a su memorización, mientras que en ningún caso explican cómo representar la multiplicación de manera que sea conceptual y más fácil el proceso de memorización.

Por otro lado, consideramos interesante reflexionar sobre la visión de los profesores de este estudio acerca del uso de materiales didácticos en las clases de matemáticas. Vemos que a pesar de indicar que usan materiales didácticos en sus aulas, y en particular para la multiplicación, los profesores del estudio no explicitan el uso que hacen de dichos materiales. Asimismo, los profesores centran su uso en los alumnos que presentan barreras para la participación y el aprendizaje, se desconoce si debido a su propia experiencia como alumnos de matemáticas, a una visión de las matemáticas como una materia que debe abordarse desde el lápiz y el papel, o a una falta de estrategias para la enseñanza de la multiplicación más allá de la escritura matemática.

Para finalizar, señalar que el instrumento permite explorar la concepción de los docentes acerca de la didáctica de la matemática, de las metodologías para su enseñanza y de las dificultades para su aprendizaje; y, por ende, la visión de los docentes acerca de la enseñanza de las matemáticas. A partir de la exploración que nos ofrece el instrumento, consideramos interesante seguir con el estudio invitando a los profesores participantes a un grupo de discusión donde profundizar en los aspectos más relevantes obtenidos.

Se espera que el instrumento y la investigación que se presenta genere interés a partir de las respuestas de los profesores participantes, además de una oportunidad para la reflexión desde la formación inicial de los futuros profesores (estudiantes de pregrado) y de los profesores en ejercicio docente. En síntesis y dado que el instrumento fue diseñado pensando en su capacidad para el estudio de prácticas pedagógicas, se espera que se haya aportado para reflexionar en el desarrollo profesional docente de los profesores de matemáticas de educación básica.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad y Superintendencia de Educación (2011). Ley Nº 20529/2011. *Diario Oficial de la República de Chile*, http://www.leychile.cl/N?i=1028635yf=2011-08-27yp=

Aguilar, M., Aragón, E., y Navarro, J. I. (2015). Las dificultades de aprendizaje de las matemáticas (DAM). Estado del arte. *Revista de Psicología y Educación, 10*(2), 13-42.

Boqué, M. C., Alguacil, M., y Pañellas, M. (2016). Creencias de los futuros maestros acerca de la docencia de las matemáticas. *International Journal of Developmental and Educational Psychology INFAD Revista de Psicología, 1*(1), 407-418.

Bruner, J. (1966). *The culture of education*. Harvard University Press

Castro, E. y Castro, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *UNO- Revista de Didáctica de las Matemáticas, 54*, pp. 31-40.

Castro, E. y Ruiz, F.J. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En Isidoro Segovia Alex y Luis Rico Romero (coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 99-122). Pirámide.

Clark, F. B. y Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 41-51.

Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (eight edition). Routledge.

Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM). http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas. MEC: Labor.*

Dubé, A. K. y Robinson, K. M. (2018). Children's understanding of multiplication and division: Insights from a pooled analysis of seven studies conducted across 7 years. *British Journal of Developmental Psychology, 36*(2), 206-219.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta dela RSME, 9*(1), 143-168.

Fernández, J. A. (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica. *Revista Iberoamericana de educación, 43,* 119-130.

Fischbein, E., Deri, M. Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.16.1.0003

Flores, P., Castro, E., y Fernández, J. A. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En Pablo Flores y Luis Rico (coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp.205-230). Pirámide.

Galton, M., Hargreaves, L., Comber, C., Wall, D., y Pell, T. (1999). Changes in patterns of teacher interaction in primary classrooms: 1976-96. *British Educational Research Journal, 25*(1), 23-37.

Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética III. Implicaciones de la teoría de Piaget.* Aprendizaje Visor.

Llinares, S. (1998). La investigación sobre el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula, 10*, 153-179.

Milton, J. H., Flores, M. M., Moore, A. J., Taylor, J. L. J., y Burton, M. E. (2018). Using the Concrete-Representational-Abstract Sequence to Teach Conceptual Understanding of Basic Multiplication and Division. *Learning Disability Quarterly, 42*(1), 32-45.

MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares de enseñanza básica. Ministerio de Educación.* Santiago. Chile.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* SAEM Thales.

Orozco, M. (2018). La estructura multiplicativa. Universidad del Valle. https://studylib.es/doc/8049339/la-estructura-multiplicativa-mariela-orozcohormaza

Orton, A. (2003). Didáctica de las matemáticas: cuestiones, teoría y práctica el aula (cuarta edición). Ediciones Morata.

Proyecto Interno (2018). *Estudio exploratorio sobre la práctica pedagógica de la enseñanza de la multiplicación em las escuelas básicas de la comuna de Puerto Montt*. Universidad Autral de Chile, Sede Puerto Montt.

Stare, A. R. (2010). *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino.* (Disertación doctoral no publicada). Universidade de São Paulo.

Thompson, P. W. y Saldanha, L. A. (2003). Fractions and Multiplicative Reasoning. En J. Kilpatrick, G. Martin, y D. Schifter (Eds.), *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.630.5632&rep=rep1&type=pdf

Van de Walle, J. A., Karp, K., y Bay-Williams, J. M. (2014). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Pearson.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas Editorial.

Autor de correspondencia

XIMENA OYARZO

Dirección: Instituto de Especialidades Pedagógicas, Universidad Austral de Chile, Sede Puerto Montt, Puerto Montt, Chile
ximena.oyarzo@uach.cl

 https://doi.org/10.24844/EM3502.05

La complejidad de las tareas auténticas estimadas desde el contexto real del desarrollo docente

The complexity of authentic tasks estimated from the real context of the teacher development

Miriam Deysi Bautista Lopez,[1] Fiorella Casallo Chanco,[2] Gabriela Mercedes Ruiz Quispe,[3] Fabiola Talavera-Mendoza[4]

Resumen: La formación y experiencia de los docentes en la creación de problemas verbales matemáticos es un reto influenciado por las características del enunciado y la persona. Nos centramos en analizar el nivel de desempeño de las tareas formuladas con base en la autenticidad, realismo y dominio cognitivo construidos por los profesores de formación continua (o servicio) y formación inicial (o pre-servicio). Se realizó el análisis de contenido de 30 enunciados compilados mediante la técnica de análisis de contenido, atendiendo descripciones cualitativas codificadas en función a los datos y secuencias semánticas categorizadas. Los resultados indican una prevalencia de tareas auténticas por parte del profesorado en servicio con inclinación al dominio cognitivo a diferencia del pre-servicio que presenta una ligera desviación a tareas ficticias y verosímiles. Se presentan hallazgos en el ejercicio de la docencia de formación continua, demostrando una ventaja en el planteamiento,

Fecha de recepción: 30 de septiembre de 2022. **Fecha de aceptación:** 30 de marzo de 2023.

[1] Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Campus Sociales, Facultad de Ciencias de la Educación, Educación Primaria, mbautistalo@unsa.edu.pe, orcid.org/0000-0002-5726-5443.

[2] Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Campus Sociales, Facultad de Ciencias de la Educación, Educación Primaria, fcasallo@unsa.edu.pe, orcid.org/0000-0002-1230-1156.

[3] Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Campus Sociales, Facultad de Ciencias de la Educación, Educación Primaria, gruizq@unsa.edu.pe, orcid.org/0000-0003-1341-394X.

[4] Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Campus Sociales, Facultad de Ciencias de la Educación, Educación Primaria, ftalaveram@unsa.edu.pe, orcid.org/0000-0002-0008-5206.

comprensión de tareas y el rediseño para generar oportunidades de aprendizaje y, por otro lado, la necesidad de mejorar la formación profesional en el desarrollo de habilidades cognitivas en la formulación de problemas verbales complejos en futuros docentes.

Palabras clave: *Aprendizaje auténtico; educación primaria; enunciados matemáticos y tareas realistas.*

Abstract: The training and experience of teachers in the creation of mathematical verbal problems is a challenge influenced by the characteristics of the statement and the person. We focus on analyzing the level of performance of the tasks formulated based on authenticity, realism, and cognitive mastery built by teachers of continuous training (or in-service) and initial training (or pre-service). Content analysis of 30 statements compiled using the content analysis technique was performed, and attending qualitative descriptions encoded according to the data and semantic sequences categorized. The results indicate a prevalence of authentic tasks by in-service teachers with an inclination to the cognitive domain as opposed to pre-service, who present a slight deviation from fictitious and plausible tasks. Findings are presented in the exercise of continuous teaching, demonstrating an advantage in the approach, understanding of tasks and redesign to generate learning opportunities and, on the other hand, the need to improve professional training in the development of cognitive skills in the formulation of complex verbal problems in future teachers.

Keywords: *Authentic learning, primary education, mathematical statements, and realistic tasks.*

1. INTRODUCCIÓN

Dado que, las matemáticas influyen de una u otra forma en todas las decisiones de la vida (Anthony y Walshaw, 2009), el profesorado debe de ser capaz de gestionar el aprendizaje matemático con experiencias cercanas, tareas sólidas y significativas para el alumnado (Anthony y Walshaw, 2009; Hernandez y Vos, 2018; Kohen y Orenstein, 2021). Un planteamiento de tareas basadas en la comprensión de las ideas matemáticas (Llinares, 2013), debe llevar a una variedad de soluciones matemáticas (Sevinc y Lesh, 2021). Sin embargo, las tareas que se asignan, en ocasiones, generan desmotivación, aburrimiento y poco interés en el alumnado, ya que son excesivas y fuera del contexto real. En tal sentido, es el docente responsable de reflexionar y de ajustar a diferentes áreas temáticas y contextos reales (Isik y Kar, 2012; Miller, 2012; Ramírez y Artunduaga, 2018) que permitan al estudiante desempeñar diferentes roles, estimular la creatividad y el pensamiento matemático (Yeo, 2017) y, en consecuencia, un aprendizaje significativo.

En la actualidad, existen diferentes creencias y concepciones en el manejo de estas tareas auténticas por parte del profesorado (Chamoso y Cáceres, 2018; Koray, 2019; Vicente y Manchado, 2017), donde el problema principal se centra en el tipo de enunciado que utilizan y el desconocimiento en el sistema de categorías de autenticidad en su elaboración (Cáceres *et al.*, 2015), así como el nivel de comprensión (Kurshumlia y Vula, 2021). Teniendo en cuenta esta perspectiva, el profesorado presenta dificultades al reformular los enunciados matemáticos por lo que es importante participar en el arte de plantear problemas, teniendo en cuenta la carga cognitiva, metacognitiva, comportamental y motivacional que poseen para el éxito de la tarea (Cai *et al.*, 2020; Martínez-Padrón, 2021), y que además conduzca a la activación de conocimientos y prácticas matemáticas eficaces (Vicente y Manchado, 2017). Pero en la realidad, existe una limitación en la comprensión conceptual y de creatividad, por lo que debe haber una reinterpretación del currículo por parte de los maestros para generar una oportunidad de rediseñar los materiales para incluir el planteamiento de problemas (Cai *et al.*, 2020).

Según la literatura revisada, la tendencia de los trabajos del profesorado en pre-servicio está centrada en experiencias de aprendizaje que incluyen dimensiones de la tarea auténtica, realismo y dominios cognitivos a través de talleres y proyectos de innovación (Chamoso y Cáceres, 2018; Koray, 2019; Sevinc y Lesh, 2021), así como, el uso de vídeos para reflexionar en torno a las tareas auténticas (Codreanu *et al.*, 2020), para mejorar la calidad en la enseñanza y aprendizaje en las lecciones de matemáticas y otros estudios referidos al análisis de enunciados propuestos en textos de matemáticas, con un porcentaje muy alto de tareas rutinarias y descontextualizadas (Vásquez *et al.*, 2021), que no equivalen al dominio por cada contenido del currículo escolar de matemáticas (Cai *et al.*, 2020).

De acuerdo con los estudios previos, se puede evidenciar la necesidad de una propuesta teórica y práctica del análisis de los enunciados matemáticos, en contextos reales (Chamoso y Cáceres, 2019; Cubero-Ibáñez y Ponce-Gonzáles, 2020), que conduzcan a un diagnóstico de las habilidades cognitivas para desarrollar tareas matemáticas cercanas al contexto real del alumnado (Paredes *et al.*, 2020; Sevinc y Lesh, 2021), donde se pueda evidenciar las características de las tareas y su influencia en el compromiso de los profesores (Li *et al.*, 2020). Así como la importancia de los problemas verbales complejos para desarrollar habilidades cognitivas (Strohmaier *et al.*, 2022), por ello sería importante observar el conocimiento del contenido pedagógico de los docentes sobre la resolución de problemas verbales (Csíkos y Szitányi, 2020).

Por lo tanto, se requiere que los docentes interpreten las tareas de resolución de problemas en sus propios materiales escritos como oportunidades para plantear problemas, como rediseñadores del currículo (Cai *et al.*, 2020). Nuestra propuesta gira en torno al desarrollo de una técnica grupal de discusión, donde se aborda el diseño de tareas en el contexto de la educación primaria, para ser analizadas de acuerdo con las especificidades que presenta cada categoría de estudio. Por lo cual, buscamos abordar este vacío de investigación teniendo en cuenta el desempeño tanto del profesorado en pre-servicio y de formación continua con el grado de autenticidad de una muestra de enunciados matemáticos, creados por los mismos actores, realizando el análisis de datos en tablas de contingencia.

2. MARCO TEÓRICO

Formulación de enunciados matemáticos por el profesorado en formación inicial y continua

Las tareas son el medio de aprendizaje que construye el profesorado para asegurar la comprensión de conceptos matemáticos, haciendo uso de procedimientos como: razonar, calcular y representar diferentes experiencias en el quehacer matemático del estudiante (Herbst, 2012; Hiebert y Grouws, 2007; Martín y Gourley-Delaney, 2014), prestando especial atención al desarrollo de tareas auténticas, que implican resolver situaciones problemáticas que pueden acontecer en la vida real y cercana del estudiantado (Palm y Nyström, 2009), lo que significa que los profesores pueden reinterpretar la resolución de problemas existentes en los libros de texto en tareas que se convierten en oportunidades para plantear otros problemas y/o estrategias para hacer razonar al estudiante (Cai *et al.*, 2020), destacando, el planteamiento de problemas como una parte integral de la resolución de los mismos (Li *et al.*, 2020).

Los problemas verbales, presentan una connotación especial en el currículo peruano, que demanda su desarrollo por ciclos, dependiendo de los contenidos a desarrollar. En tal sentido, existen problemas verbales prototipo que no presentan ninguna demanda cognitiva (María tiene 5 manzanas y se come una ¿Cuántas le quedan?) y los problemas verbales complejos que deben tener: (a) información en una sintaxis que no refleja simplemente la tarea matemática, (b) información que puede ser redundante o superficial, (c) múltiples representaciones y (d) un contexto funcional para la solución del problema, que los enmarca como problemas realistas o auténticos, por lo tanto, las habilidades de los problemas verbales se evalúan como decodificación del texto y comprensión de lectura (Strohmaier *et al.*, 2022), demostrando que la activación cognitiva para resolver un problema de enunciado verbal requiere de un clima de apoyo y gestión del aula por parte del docente (Daroczy *et al.*, 2020). Así como, reconocer que la parte principal en la resolución de problemas verbales es la comprensión del texto (Kurshumlia y Vula, 2021) y la mirada que se debe trabajar en torno a lo que expresa el problema (Carotenuto *et al.*, 2021), que es la razón de nuestro análisis, teniendo en cuenta un componente narrativo, informativo y de pregunta (Gerofsky, 1996). Donde la riqueza de las tareas realistas está en el nivel de inferencias que se construyan (Carotenuto *et al.*, 2021), como la comprensión de la situación denotada en el enunciado (Orrantia *et al.*, 2005), traduciendo una situación real a términos matemáticos (Passarella, 2021).

En tal sentido las tareas matemáticas realistas requieren de la interpretación y comprensión de una situación de la vida real para resolver un problema (Paredes *et al.*, 2020) y son categorizadas en realistas y no realistas. La primera presenta una situación cotidiana donde el sujeto no solo utiliza el cálculo, sino que reconoce cómo y cuándo aplicar su conocimiento matemático y no matemático y la segunda, se enfoca solo en aspectos matemáticos rutinarios (Cáceres y Chamoso, 2017; Strohmaier, 2022; Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020; Verschaffel *et al.*, 2000).

En esta línea, el diseño de tareas auténticas presenta la concreción de cinco dimensiones, basados en el modelo de Palm (2008): (a) Evento, es una situación contextualizada y situada fuera de la escuela; (b) Pregunta, presenta concordancia con la situación equivalente a fin de plantearse el evento descrito; (c) Existencia de datos, permite ubicar los datos e inferir y relacionarlo con la vida real; (d) Propósito, busca que el estudiante pueda deducir que le pide el enunciado y su idoneidad con la situación contextualizada; y (e) Especificidad de datos, es aquella que busca describir el contexto de los objetos, personajes, eventos que permitan los detalles específicos y exactos de los datos para desarrollar las estrategias de resolución de los problemas, a fin de determinar si se trata de una tarea auténtica, verosímil o ficticia; en tal sentido se han utilizado códigos de descripción para el análisis de la resolución de problemas con base en la teoría de los autores (Cáceres *et al.*, 2015; Chamoso y Cáceres, 2018; Paredes *et al.*, 2020).

Esta propuesta está basada en los principios de la educación matemática realista que contiene: (a) Principio de actividad, reconocer que el estudiante es el factor clave y tiene un papel activo en el proceso de enseñanza; (b) Principio de realidad, los estudiantes resuelven problemas significativos con estructuras matemáticas y (c) Principio de nivel, que pasa por modelos para aplicar y algoritmos a utilizar como puente de las experiencias informales a la matematización; (d) Entrelazamiento con tareas para razonar, usar algoritmos e integrar áreas; (e) Interactividad actividades individuales y grupales para el aprendizaje por descubrimiento y; (f) Orientación, uso de escenarios reales y significativos (Trung *et al.*, 2019). Así como también, en las características de las matemáticas realistas, que parten del contexto, en su planteamiento para lograr las matematizaciones, el uso de instrumentos verticales, imágenes, esquemas con métodos formales e informales y actividades interactivas para la explicación y justificación (Adjie *et al.*, 2021).

El ejercicio de la profesión y el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje de problemas matemáticos implica un conocimiento teórico tanto del propio proceso, como didáctico sobre la resolución de problemas (Sevinc y Lesh, 2021). Por tanto, una competencia profesional del profesorado demanda el desarrollo de dominios cognitivos (Chamoso y Cáceres, 2019; Pappas *et al.*, 2019), y la capacidad de diseñar situaciones comprensibles para contextualizar operaciones matemáticas (Verschaffel *et al.*, 2000; Vicente y Manchado, 2017), usando el modelado en el planteamiento de enunciados.

Teniendo en cuenta lo anterior, nos planteamos los siguientes objetivos:

- Analizar si existe una diferencia significativa en el desempeño entre docentes en servicio y pre-servicio, con el grado de autenticidad de una muestra de tareas de enunciados matemáticos.
- Describir si existe una asociación significativa entre el tipo de tarea auténtica con el dominio cognitivo que poseen los docentes en servicio y pre-servicio.
- Examinar si existe una relación en la construcción y diseño de las dimensiones de la autenticidad con el nivel de realismo en los docentes en servicio y pre-servicio.
- Identificar si existe una asociación de los problemas realistas con el grado de autenticidad sobre el dominio cognitivo.

3. MÉTODO

El presente estudio buscó analizar el desempeño de los docentes de formación inicial y continua respecto a la formulación y diseño de enunciados matemáticos, para discriminar según el tipo de dimensiones de las tareas auténticas, complejidad cognitiva y realismo. Centrado en la técnica del análisis de contenido temático que, permite clasificar las situaciones problemáticas mediante categorías de análisis de acuerdo con la teoría que emerge (López y Sandoval, 2016; Rodríguez *et al*., 1996).

Se utilizaron para el análisis de contenido, 30 enunciados matemáticos producto de la técnica grupal de discusión que ha permitido interactuar y recopilar información entre un grupo pequeño de personas, en torno a un tema homogeneizado (López y Sandoval, 2016). Se utilizó el análisis de tablas de contingencia como técnica para la relación entre dos o más variables categóricas (López-Roldán y Fachelli, 2016). Su procesamiento fue de tipo cuantitativo estadístico que de manera deductiva busca en el texto categorías analíticas previamente establecidas y generan codificaciones, que se construyen mediante referentes teóricos y pueden determinarse en distribuciones frecuenciales y correlacionales (Herrera, 2018).

Los y las participantes del estudio fueron 15 docentes de formación continua (13 mujeres y 2 varones) con más de 10 años de experiencia y 15 de formación en pre-servicio (13 mujeres y 2 varones) de último ciclo de una universidad pública, donde los docentes en formación continua se encuentran entre las edades de 32 a 37 años (13,3%); entre 38 a 43 años (6,7%); de 44 a 49 años (33,3%); entre 50 a 55 años (20%) y de 56 a 62 años (26,7%). En cuanto a los docentes en pre-servicio, principalmente en la muestra estudiada, corresponde a los profesores que cuentan entre 21 a 24 años (73.3%); de 25 a 28 años (13,3%); entre 29 a 32 años (0%); de 33 a 36 años (6,7%) y entre 37 a 41 años (6,7%).

El estudio se llevó a cabo durante los meses de agosto y septiembre del 2021. El muestreo es no probabilístico por cuotas, a criterio de los investigadores con características de control (Tamayo, 2001). Con criterios de inclusión: según el tipo de prestación de servicio, que todos los participantes hayan adquirido al menos alguna experiencia práctica en la enseñanza de la matemática, que trabajen en escuelas públicas y la participación voluntaria.

3.1 Técnicas de análisis de datos

Para la parte descriptiva se utilizó la distribución de frecuencias, la cual consiste en un conjunto de puntuaciones de una variable, cuyos datos se ordenan en categorías (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018, p. 328). Por otro lado, se utilizó la prueba de RHO de Spearman para la relación entre las variables de medición ordinal, por contener datos no paramétricos (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). Para el análisis inferencial, se utilizó la prueba de *pruebas Chi cuadrado de asociación* que consiste en relacionar datos categóricos nominales y ordinales, con el propósito de comprobar que los datos de asociación no provienen del azar y se relacionen significativamente.

3.2 Procedimiento de recogida de datos:

3.2.1 Fase 1: Planificación

Se hizo la invitación a los 40 estudiantes de quinto año del programa de educación primaria (profesores de formación inicial o en pre-servicio) por intermedio de la docente que lleva el curso de investigación para participar en un proyecto de investigación, explicando el objetivo y la utilidad del mismo. Junto con la invitación, se hizo llegar el consentimiento informado online y 15 estudiantes aceptaron participar.

Del mismo modo, se contó con la participación de 15 profesores de formación continua, que estaban siendo preparados para acompañantes pedagógicos llevado a cabo por la Gerencia Regional de Arequipa. Ambos grupos formaron parte de este estudio, se llevó a cabo en los meses de agosto y septiembre respectivamente.

3.2.2 Fase 2: Grupos de discusión

Se señalaron dos fechas para el desarrollo de los grupos de discusión haciéndolas coincidir con las últimas dos semanas del mes de agosto para el profesorado de formación continua. El grupo de discusión se llevó a cabo en dos fechas: (1) para el profesorado de formación continua en las dos últimas semanas del mes de agosto, y (2) para el profesorado de formación inicial (estudiantes de prácticas pre profesionales continuas) se realizó en la segunda semana de septiembre. En ambos casos, se llevaron a cabo dos sesiones con una duración de seis horas que fueron dirigidas por los mismos investigadores del estudio.

3.2.3 Fase 3: Ejecución

Día 1: A los 15 docentes en formación continua y 15 en pre-servicio, se les motivó con imágenes de situaciones contextualizadas, para interactuar e introducir las características de un enunciado matemático y tarea auténtica. Seguidamente, se capacitó con base en los tipos de enunciados PAEV, ejecutándose por medio de la plataforma Google Meet durante 3 horas.

Día 2: Se designó individualmente a cada docente de formación continua y de formación inicial un tipo de enunciado PAEV para que lo formule por medio de Google Slides, durante 30 min. Después del trabajo individual, volvieron a la sala de videoconferencia nuevamente por Google Meet, de forma aleatoria los docentes presentaron oralmente sus enunciados matemáticos para el tipo de tarea auténtica, realismo y nivel de dominio cognitivo en el que se encuentran, procediéndose luego al refinamiento colectivo, con discusiones y diálogos para reformular sus problemas en un promedio de 3 horas como se observa en la figura 1.

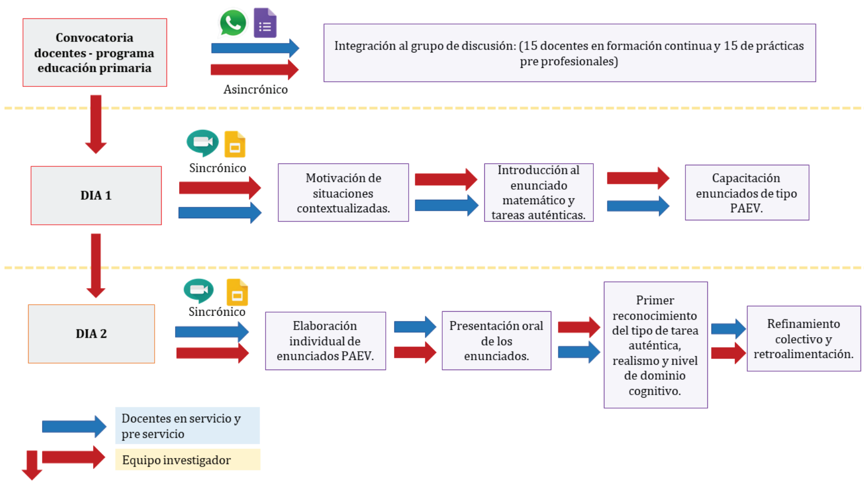


Figura 1. Estrategia para la formulación de enunciados verbales matemáticos.

3.2.4 Fase 4: Evaluación

El nivel de desempeño de las tareas de los enunciados formulados por los docentes, fueron analizados con los descriptores de cada categoría por cada una de las investigadoras, llegando a consensos para la determinación y valoración categórica final de los 30 enunciados formulados por los docentes de pre-servicio y continua.

3.3 Instrumento

Se diseñó una rúbrica de análisis para cada uno de los enunciados con base en los siguientes aspectos:

Para medir el grado de autenticidad se ha empleado un sistema de categorías de los enunciados matemáticos propuestos por Palm (2008) y adaptados en los estudios de Cáceres *et al.*, (2015); Chamoso y Cáceres, (2018) y Paredes *et al.*, (2020). Estos son: el evento, la pregunta, la existencia de datos, el propósito y especificidad de los datos; con el fin de clasificarlas en auténticas, verosímiles y ficticias; con condiciones controladas y estandarizadas, usando el valor de 0 cuando no exista evidencia como lo mostramos en la tabla 1.

Tabla 1. Rúbrica propuesta para medir las Tareas Auténticas

Tipo de tarea	Nivel de desempeño (evento, pregunta, existencia de datos, propósito, especificidad de datos)	Descriptor	Valoración
Nivel de autenticidad de la tarea específica	Tarea auténtica (1,1,1,1,1)	Es considerada cuando responden a las cinco dimensiones propuestas.	(1;0) 1 presencia 0 ausencia
	Tarea verosímil (1,1,1,0,1), (1,1,1,1,0), (1,1,1,0,0)	Es aquella que cumple con las dimensiones de evento, pregunta, existencia de datos y las otras no.	
	Tarea ficticia (1,1,0;_;_),(0,1,0;_,_), (1,0,1;_,_), (0,0,1;_;_), (0,1,1;_,_),(0,0,0;_,_), (1,0,0;_,_)	Cuando responda a alguna o ninguna de las dimensiones de evento, pregunta y existencia de datos.	

Para la categoría de realismo se siguieron las aportaciones de Cancelo (2019), donde se le asignó en la tabla 2 los valores de 1 para las tareas realistas y 0 a las no realistas.

Tabla 2. Realismo

Realismo	Nivel de desempeño	Descriptor
Realistas	1	Cuando presentan una situación cotidiana que podría ocurrir en la vida real.
No realistas	0	Cuando solo puede presentarse en el aula.

En relación al dominio cognitivo, en la tabla 3 se analizó el tipo de complejidad de la tarea, basados en un análisis ordinal donde 1 equivale a conocer, 2 a aplicar y 3 a razonar, tomado de Mullis y Martin (2018).

Tabla 3. Dominios Cognitivos

Dominios Cognitivos	Nivel de desempeño	Descriptor
Conocer	1	Tareas que implican recordar conceptos y procedimientos ya enseñados.
Aplicar	2	Conocimientos matemáticos obtenidos en diversos problemas matemáticos, no rutinarios.
Razonar	3	De forma lógica y sistemática para resolver y reflexionar sobre la resolución del problema.

En la figura 2, para categorizar a los problemas se ha tipificado las características de las dimensiones, tipos de realismo, tipos de tareas cognitivas y tipo de enunciados verbales, que permitan estos descriptores analizar cada problema y poder categorizarlas de acuerdo con la propuesta de códigos de Cancelo (2019).

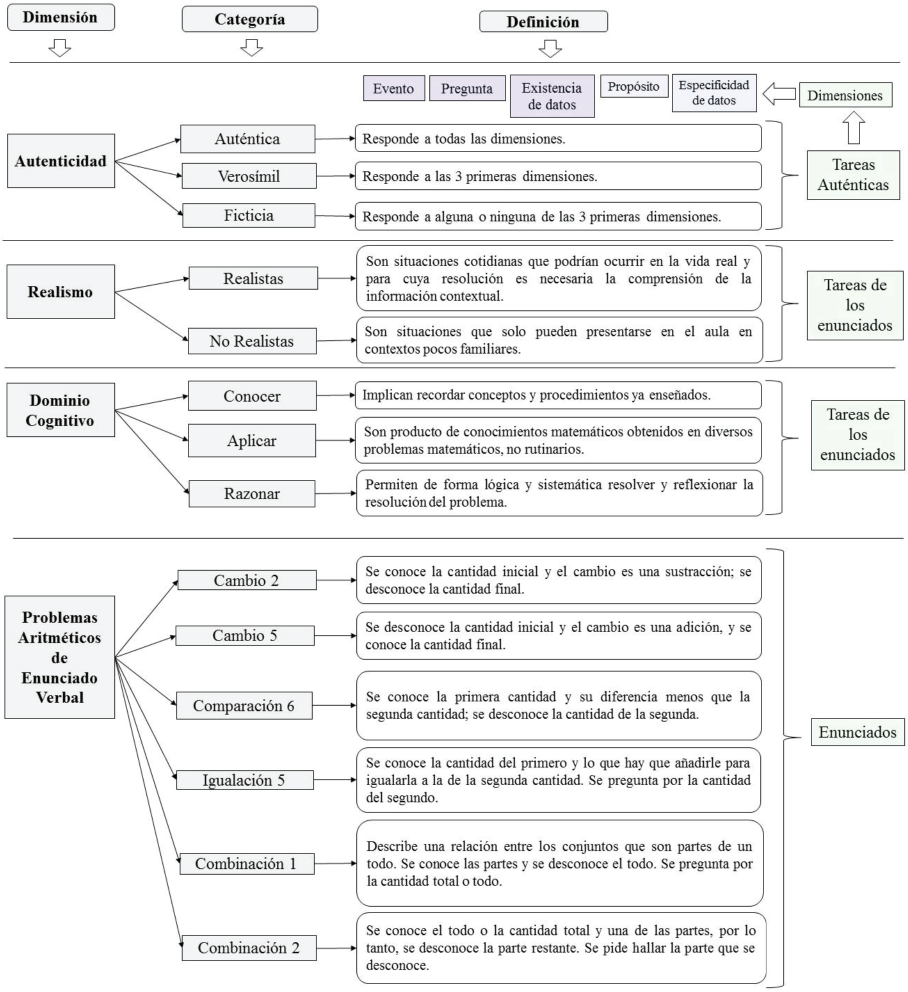


Figura 2. Selección de variables.

Del trabajo realizado con los docentes de pre-servicio y formación continua, se ha obtenido 30 problemas aritméticos de enunciado verbal. De los cuales se ha elegido al azar de manera equitativa 6 enunciados para cada caso, esto se puede visualizar en la tabla 4.

Tabla 4. Elaboración de enunciados matemáticos para ser categorizados

EN SERVICIO	E1	Cambio 2	En el supermercado mamá cogió 16 latas de leche, pero al pagar tuvo que devolver 7 latas de leche porque no le alcanzó el dinero. ¿Con cuántas latas de leche se quedó mi mamá?
	E2	Comparación 6	Juan tiene 12 días de vacaciones. Juan tiene 3 días menos de vacaciones que Luisa. ¿Cuántos días de vacaciones tiene Luisa?
	E3	Igualación 5	Pablo fue al supermercado y compró 28 bolsas de leche. Si se derraman 9 bolsas de leche tendría tantas bolsas como tiene Humberto. ¿Cuántas bolsas de leche tiene Humberto?
	E6	Combinación 2	En el aula del 3er grado de primaria de la I.E del distrito de Socabaya, de un total de 30 estudiantes ingresaron a actividades virtuales 22. ¿Cuántos estudiantes no se conectaron en estas actividades virtuales?, ¿Qué inconvenientes crees que se les presentaron al no poder ingresar a la actividad?, ¿Se te presentó un problema parecido anteriormente?, ¿Qué solución le diste?, ¿Cómo crees que se pueda saber la cantidad de estudiantes que no ingresaron a la actividad?
	E7	Combinación 1	La I.E. Pedro Castillo, organiza una fiesta por el día del estudiante para agasajar a los estudiantes del aula del 3er grado "B", a la cual asistieron, 12 niños y 8 niñas. A partir de esta situación los estudiantes del 6to grado desean averiguar lo siguiente: ¿Cuántos estudiantes asistieron a la fiesta?
	E11	Cambio 5	Hay mucho entusiasmo por el mundial de fútbol Qatar 2022, Jorge ya se dio cuenta que acaban de salir a la venta el álbum del mundial, sabiendo esto él recuerda que ya tenía cierta cantidad de dinero ahorrado en su alcancía. Sus padres al notar su afición por el mundial, le dieron 15 soles y ahora tiene 37 soles. ¿Cuánto dinero tenía en su alcancía inicialmente?
EN PRE-SERVICIO	E17	Cambio 2	Clarita tiene 25 chocolates y por el día de la madre regaló 7 chocolates a su mamá y a sus tías. ¿Cuántos chocolates le quedan ahora a Clarita?
	E21	Comparación 6	Mi madre tiene treinta y siete años, seis años menos que mi padre. ¿Cuántos años tiene mi padre?
	E22	Igualación 5	Andrea tiene 7 vestidos. Si su mamá le regalara 2 vestidos más tendría la misma cantidad de vestidos que tiene Celeste ¿Cuántos vestidos tiene Celeste?
	E26	Combinación 2	De las catorce películas que tiene Mariano, 9 son de aventuras y el resto de animales. ¿Cuántas películas de animales tiene Mariano?
	E29	Combinación 1	En una fiesta de cumpleaños asistieron 12 niños y 8 niñas. ¿Cuántos niños y niñas en total asistieron a la fiesta?
	E30	Cambio 5	En la farmacia de su comunidad, Nani ha vendido varias mascarillas quirúrgicas por la mañana y por la tarde ha vendido 45 mascarillas. Al final del día ha vendido un total de 80 mascarillas. ¿Cuántas mascarillas vendió por la mañana?

Códigos analizados por cada enunciado matemático formulado

De acuerdo con la teoría descrita, las autoras realizamos un análisis de contenido por cada enunciado, respaldando la codificación asignada, tal como mostramos en los dos ejemplos descritos a continuación:

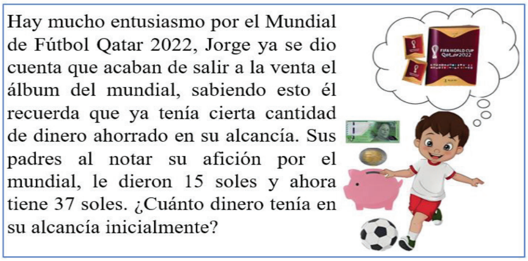


Figura 3. E11 formulado por un docente en Servicio que resultó ser Auténtico, Realista y utilizando un dominio cognitivo de Razonar.

Enunciado 11

- Presenta las cinco dimensiones de *Autenticidad* codificado de la siguiente manera (1;1;1;1;1;1): (i) evento, que parte de una situación contextualizada real, en este caso se muestra el escenario del "Mundial de Fútbol Qatar 2022", claramente el desarrollo de este evento no siempre puede ser el más próximo al de un estudiante, pero dentro de este se viven diferentes situaciones como la presentación y venta del álbum oficial, siendo así una alternativa correcta de presentarlo. (ii) La pregunta, que posee un valor práctico donde la acción es detraer. (iii) En la existencia de datos, se puede discriminar las dos partes lo que había y lo ganado dentro de un espacio. (iv) El propósito implica la conceptualización de las dos partes, lo que había y lo ganado y (v) en la especificidad de datos, está formulada en segunda persona denotando los personajes y el evento generando el interés por resolver el problema.
- *Realismo:* En este sentido, las tareas realistas se producen dentro de un contexto real (Mundial de Fútbol Qatar 2022). Sin embargo, para la resolución de estas tareas, es necesario que el estudiante sepa cuándo y cómo aplicar el conocimiento matemático mientras toma sus decisiones, por

ejemplo: Jorge tiene que averiguar cuánto dinero tenía inicialmente en su alcancía y para ello tuvo que interpretar que, antes de recibir los 15 soles, tenía menos dinero y para saber cuánto era al inicio tuvo que reconocer ambas cantidades para darles un razonamiento posterior, por lo que le era necesario aplicar una sustracción de ambas cantidades para dar solución a la pregunta planteada.

– *Dominio Cognitivo*: Presenta un nivel de Razonar, debido a que la tarea no solo le implicó realizar una sustracción para ser resuelta, sino que permite a los estudiantes conectar diferentes elementos de conocimiento, como buscar la operación correcta para representar cuánto dinero tuvo al inicio y si realmente aumentó para comprar el álbum y así resolver lo que la tarea requiere.

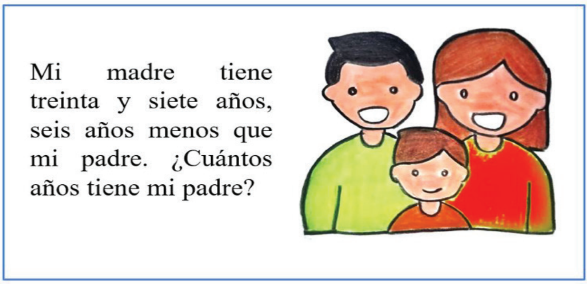


Figura 4. E21 formulado por un docente en pre-servicio que resultó ser Ficticio, No Realista y utilizando un dominio cognitivo de Razonar.

Enunciado 21

– Respecto a *Autenticidad:* El docente en pre-servicio presentó una tarea ficticia porque en las dimensiones de evento y especificidad de datos no se logró formular de manera correcta, ya que el contexto no está muy situado y los datos del enunciado no son fáciles de imaginar y de representar, a pesar que sigue una forma textual adecuada, cuesta entender lo que tiene uno de más y el otro tiene de menos que podría dificultar el cálculo, obteniendo la codificación (0,1,1,1,0).

- *Realismo:* No presenta un contexto de su interés, pero requiere de la resolución en términos comparativos lo que tiene uno más o lo que tiene el otro menos.
- *Dominio Cognitivo:* En este sentido este problema de comparación 6, requiere saber cuántos años tiene el padre, por tanto, se pide la diferencia de una cantidad respecto a la otra, pero la operación es una adición. Este problema es incongruente y reversible, ya que se puede abordar de uno u otro lado, obteniendo el mismo resultado.

4. RESULTADOS

En la tabla 5 tenemos el producto de las intervenciones con los docentes de pre-servicio y formación continua con 30 enunciados que han sido evaluados a través del sistema de categorías establecido en la rúbrica. Teniendo en cuenta que el primer eslabón es el docente, quien diseña los desempeños en las actividades de aprendizaje, para luego ejecutarlos en el aula en un contexto de relevancia cultural, que lleva a la adaptabilidad de los enunciados matemáticos propuestos (Trung *et al.*, 2019).

Tabla 5. Análisis de resultados según Autenticidad, Realismo y Dominio Cognitivo

		Autenticidad			**Realismo**		**Dominio Cognitivo**		
		Ficticia	Verosímil	Auténtico	Realistas	No Realistas	Conocer	Aplicar	Razonar
EN SERVICIO	E1			1,1,1,1,1	1			2	
	E2	0,1,1,1,0				0			3
	E3		1,1,1,1,0		1			2	
	E4			1,1,1,1,1	1				3
	E5			1,1,1,1,1	1		1		
	E6			1,1,1,1,1	1				3
	E7			1,1,1,1,1	1		1		
	E8		1,1,1,1,0		1		1		
	E9			1,1,1,1,1	1				3
	E10			1,1,1,1,1	1				3
	E11			1,1,1,1,1	1				3
	E12	1,0,0,1,0				0	1		
	E13		1,1,1,1,0		1		1		
	E14			1,1,1,1,1	1				3
	E15			1,1,1,1,1	1			2	
EN PRE-SERVICIO	E16	0,1,1,1,0				0	1		
	E17		1,1,1,1,0		1		1		
	E18		1,1,1,1,0		1				3
	E19			1,1,1,1,1	1				3
	E20			1,1,1,1,1	1				3
	E21	0,1,1,1,0				0			3
	E22		1,1,1,1,0			0		2	
	E23			1,1,1,1,1	1				3
	E24			1,1,1,1,1	1				3
	E25		1,1,1,1,0			0	1		
	E26	0,1,1,1,0				0	1		
	E27			1,1,1,1,1	1				3
	E28	1,1,0,1,0				0	1		
	E29		1,1,1,1,0			0	1		
	E30			1,1,1,1,1	1				3
		6	**8**	**16**	**21**	**9**	**11**	**4**	**15**

Se emplearon las tablas de contingencia para analizar la relación entre las dos variables, para interpretar los datos con base en cálculos de porcentajes, y analizar la significación estadística del desempeño docente en relación al tipo de prestación de las tareas auténticas, tipo de realismo y dominios cognitivos.

Tabla 6. Autenticidad de la tarea en relación a la prestación del servicio

Tipo prestación		**Tipo_Ta_Aut**			
		(1) Ficticia	**(2) Verosímil**	**(3) Auténtica**	**Total**
Servicio	Observado	2	3	10	15
	% dentro de la fila	13,3 %	20,0 %	66,7 %	100,0 %
Pre-Servicio	Observado	4	5	6	15
	% dentro de la fila	26,7 %	33,3 %	40,0 %	100,0 %
Tota	Observado	6	8	16	30
	% dentro de la fila	20,0 %	26,7 %	53,3 %	100,0 %

De acuerdo con las muestras de estudio de docentes en servicio y pre-servicio, se evidencia en la tabla 6, que los docentes en servicio presentan mayor proporción en la realización de este tipo de enunciado auténtico; en comparación a los docentes en pre-servicio, mostrando una diferencia proporcional del 26,7%. En su contraste, los docentes en pre-servicio fueron quienes realizaron en mayor medida los enunciados de tipo verosímil con una diferencia proporcional de 13,3%. En el caso de enunciados de tipo ficticia, se observa la misma tendencia y proporción, siendo mayor la realización de estos enunciados por parte de los docentes en pre-servicio. Esto implica, que son los docentes en servicio quienes poseen mejor manejo en la realización de estos enunciados, siendo esto resultado, en un supuesto, de la experiencia que poseen en aula.

Tabla 7. Relación entre el tipo de tarea auténtica y el dominio cognitivo

Tipo prestación	Domi_Cog		Tipo_Ta_Aut			
			Ficticia	Verosímil	Auténtica	Total
Servicio	Conocer	Observado	1	2	2	5
		% dentro de la fila	20%	40%	40%	100,0 %
	Aplicar	Observado	0	1	2	3
		% dentro de la fila	0%	33%	67%	100,0 %
	Razonar	Observado	1	0	6	7
		% dentro de la fila	14%	0%	86%	100,0 %
Pre–Servicio	Conocer	Observado	3	3	0	6
		% dentro de la fila	50%	46%	0%	100,0 %
	Aplicar	Observado	0	1	0	1
		% dentro de la fila	0%	100%	0%	100,0 %
	Razonar	Observado	1	1	6	8
		% dentro de la fila	12,5%	12,5%	75%	100,0 %
Total		Observado	6	8	16	30
		% dentro de la fila	20%	27%	53%	100,0 %

Entre el dominio cognitivo y los tipos de tareas auténticas, se constata en la tabla 7 que en mayor proporción que construyen enunciados de tipo auténtico utilizando un dominio cognitivo de nivel razona, mientras que, esta tendencia disminuye en los niveles aplica y conoce. De este resultado se infiere que, en la construcción de enunciados, se inclina al dominio cognitivo razona, mientras que, en mayor proporción la creación de enunciados de tipo ficticia se da más en los docentes de pre-servicio.

Se evidencia en la figura 5, la significatividad estadística entre las variables de estudio en la que, si los docentes construyen en mayor grado un enunciado de tareas auténticas, el dominio cognitivo será eficiente en ellos, con un grado de fuerza correlativa considerable a fuerte (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018).

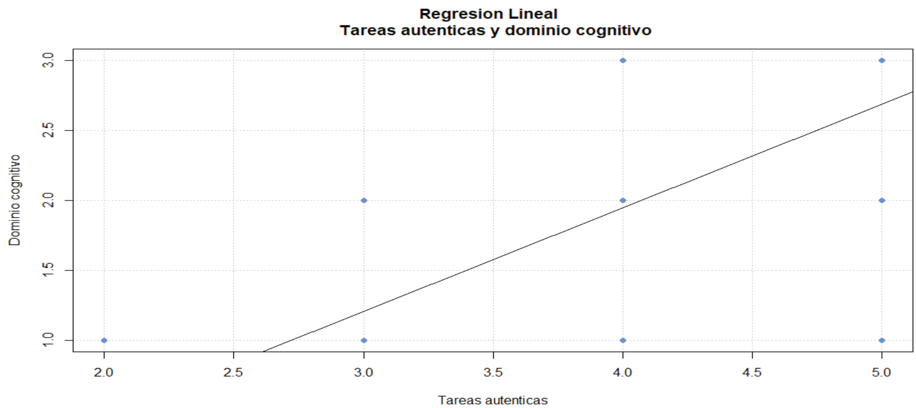


Figura 5. Regresión lineal entre tareas auténticas y dominio cognitivo.

Tabla 8. Relación entre la autenticidad de la tarea con el realismo

Tipo prestación	**Realismo**		**Tipo_Ta_Aut**			
			Ficticia	**Verosímil**	**Auténtica**	**Total**
Servicio	No realistas	Observado	2	0	0	2
		% dentro de la fila	100%	0%	0%	100,0%
	Realistas	Observado	0	3	10	13
		% dentro de la fila	0%	23%	77%	100,0%
Pre-Servicio	No realistas	Observado	4	3	0	7
		% dentro de la fila	57%	43%	0%	100,0%
	Realistas	Observado	0	2	6	8
		% dentro de la fila	0%	25%	75%	100,0%
Total		Observado	6	8	16	30
		% dentro de la fila	20%	27%	53%	100,0%

Entre el tipo de tarea auténtica y realismo, se constata en la tabla 8, que una mayor proporción de la muestra de estudio construyen enunciados de tipo auténtica con atribuciones de tipo realista (53%) en ambos tipos de prestación, siendo en menor proporción el tipo no realista en docentes en servicio. Asimismo, se observa que la elaboración de enunciados de tipo o nivel ficticia y verosímil son aquellos con características, en su contenido, no realistas y que se manifiestan más en los docentes de pre-servicio.

De acuerdo con las pruebas inferenciales, según la prueba de (X2) se evidencia que la probabilidad de error (p-valor=0.0008047) es menor al nivel alfa (margen de error 0.05); en ese sentido, se puede afirmar que, en la formulación de los enunciados matemáticos, los tipos de problemas realistas se asocian de manera significativa con el tipo de tareas auténticas.

Tabla 9. Asociación de los problemas realistas con el grado de autenticidad sobre el dominio cognitivo

Categorías		**Realismo**	**Dominio cognitivo**
Tipos de tareas auténticas	N°	30	30
	R^2	-	0,50
	Gl	2	3
	Sig (P-valor)	,0008047	,001
	p (tamaño de efecto)	1,25	0,85
	1-β (potencia estadística)	0,99	0,96

Se evidencia en la tabla 9, que el tamaño de efecto del tipo de tarea auténtica sobre los dominios cognitivos es muy grande, también que la potencia estadística es igual a 0,96; lo que significa que la probabilidad de aceptar la hipótesis nula es de 4%, es decir, es falsa. En cuanto, a la asociación entre el tipo de tarea auténtica y realismo de los enunciados creados por los docentes en servicio y pre-servicio se evidencia la existencia de una gran influencia del tipo de tarea auténtica sobre el realismo; asimismo se observa una potencia estadística de 0,99; es decir, la probabilidad de establecer o aceptar la hipótesis nula es de solo 1%, lo que significa que esta es falsa. En ese sentido, sobre las asociaciones realizadas, se evidencia, que, a pesar de la muestra, las variables de estudio se asocian de manera significativa con gran influencia de la independiente sobre la dependiente.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las tareas auténticas proporcionan el desarrollo de habilidades de razonamiento, argumentación y criticidad (Codreanu *et al.*, 2020). En este sentido, se ha encontrado que los docentes en servicio presentan en mayor proporción enunciados de tipo auténtico a diferencia de los estudiantes que están en prácticas pre-profesionales encontrando dificultades en el propósito y especificidad de datos que pertenecen a las dimensiones secundarias de la tarea auténtica. De manera similar, esta dificultad se ha encontrado en otros estudios (Chamoso y Cáceres, 2018; Koray, 2019; Codreanu *et al.*, 2020; Paredes *et al.*, 2020;), los cuales la mejoraron a través de talleres o proyectos, logrando así un equilibrio y nivel de satisfacción potenciados por la reflexión (Codreanu *et al.*, 2020), al identificar la necesidad de trabajar en el desarrollo profesional con tareas de alto dominio cognitivo y a la vez que sean auténticas (Vásquez y García-Alonso, 2020).

En relación al tipo de tarea auténtica con el dominio cognitivo, se presenta un nivel moderado, donde la mitad de los problemas propuestos llevaron a utilizar la argumentación y toma de decisiones ligadas a razonar, pero también se presentó una inclinación hacia el dominio conoce, debido a que los enunciados matemáticos propuestos fueron de tipo ficticia y verosímil. De igual manera, se halló un claro predominio de las tareas de memorización en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, centradas en la aplicación directa de fórmulas y cálculos, donde son pocas las tareas para la integración de las categorías de conexión o reflexión en los textos matemáticos analizados (Vásquez *et al.*, 2021). En contraste, se evidenció que docentes durante su formación inicial fueron capaces de formular, mayormente, tareas de tipo auténtica con correspondencia al dominio cognitivo más alto (Chamoso y Cáceres, 2018), mientras que en el presente trabajo el nivel de complejidad fue bajo ya que los enunciados propuestos no demandaron mucho esfuerzo y solo exigieron un procedimiento para su resolución.

También se confirmó que las tareas realistas se asocian significativamente con las tareas auténticas. Los resultados ratifican que la creación de tareas realistas son un desafío para los futuros profesores de primaria y que hay la necesidad de interiorizarlas (Paredes *et al.*, 2020; Yilmaz, 2020), para que combinen los conocimientos teóricos y prácticos al plantear sus enunciados. En este sentido, es pertinente construir conocimiento conceptual y relacional de contenido matemático para identificar la riqueza matemática y el significado contextual de un problema realista (Sevinc y Lesh, 2021). Con base en este modelo de matemáticas realistas se trabajó con un grupo de docentes para que elaboren material didáctico a los estudiantes, demostrando competencias docentes en su mayoría, siendo evaluada la calidad y pertinencia en torno a los principios del modelo matemático realista (Edwar *et al*., 2022).

El valor conceptual de este estudio representa un vínculo entre las disposiciones individuales y el conocimiento profesional para el análisis e interiorización de los enunciados matemáticos, a partir de categorías de análisis que, llevó a equilibrar la autenticidad, realismo y demanda cognitiva. Su importancia radica en plantear constructos válidos en el aula (Codreanu *et al*., 2020; Vásquez *et al*., 2021; Yilmaz, 2020), como demanda profesional para su intervención formativa en la resolución de problemas de tipo cognitivo (Daroczy *et al*., 2020) y realista siguiendo los principios y características de interacción e internalización de los modelos matemáticos para un óptimo rendimiento matemático (Adjie *et al*., 2021). A través del intercambio de experiencias, los maestros aumentan su conocimiento y modifican sus creencias, para promover una instrucción más situada y dinámica en el salón de clases con el objetivo de mejorar el aprendizaje de los estudiantes (Cai *et al*., 2020; Kurshumlia y Vula, 2021).

Los hallazgos, en primer lugar, proporcionan evidencia positiva en cuanto a la implementación del aprendizaje auténtico, demostrando que la experiencia profesional ha prevalecido y que hay claro entendimiento de la necesidad de contextualizar la realidad. En segundo lugar, contribuyó a refinar de manera colectiva y reflexiva las dimensiones de un problema para dar un significado contextual a sus actividades en el aula, fortaleciendo su competencia profesional. En tercer lugar, los problemas PAEV formulados, más estaban pensados en su estructura semántica que en las categorías auténticas y su análisis permitió reflexionar para integrarlas en sus actividades de aprendizaje, al momento de plantearlas en el aula. Es importante partir de las creencias de los docentes y las actividades de rediseño de los problemas matemáticos que permiten ganar confianza en la resolución y entender el contenido de lo que se enseña (Cai *et al*., 2020).

Aunque los resultados de este estudio son interesantes, se deben considerar algunas limitaciones. Primero, el estudio incluyó una muestra de 30 participantes, este número es relativamente pequeño y reduce el valor del estudio hasta cierto punto, se sugiere aplicarse en una población mayor; así como hacer un seguimiento al comportamiento del planteamiento de las tareas auténticas en el desarrollo del área de matemática en el aula, con los grupos que accedieron voluntariamente. Segundo, está basado en la libertad que se ha dado a los participantes con distintos niveles de experiencia en cada ciclo para proponer un tipo de enunciado verbal, que no ha permitido agrupar esta colección de enunciados para un análisis estructural semántico y de estrategias de solución formal e informal, que puedan conducir a nuevos campos de profundización.

En resumen, la novedad del presente estudio está relacionada con dos supuestos. Primero, relacionada a la necesidad de explorar el conocimiento del contenido pedagógico que poseen los docentes, al plantear problemas de enunciado verbal, basado en el reconocimiento de una tarea auténtica, que teóricamente se expone. Que es necesaria para conocer el nivel de planificación, creación y la conexión del conocimiento matemático (Trung *et al.*, 2019) y, segundo, el refinamiento colectivo de los enunciados matemáticos, que ha permitido a los docentes darse cuenta de los errores en la integración de las dimensiones secundarias (propósito y especificidad de datos), que no eran considerados y en otros casos generó confusión entre propósito y pregunta. Que a través del trabajo colaborativo de buscar soluciones y reflexionar en base al error, no ha sido analizado en este estudio, y que se sugiere que debe ser abordado con mayor profundidad de cómo cambia la percepción y conocimiento de las tareas auténticas en este proceso. Así como, también se sugiere que se debe conocer las situaciones en las que se enmarcan las tareas, si son de apropiación de conceptos, de razonamiento mental, de resolución, de implicación de situaciones sociales (Trung *et al.*, 2019).

Al identificar estas características del contexto en la elaboración de los enunciados verbales; consideramos la necesidad de ser abordado este contenido desde la enseñanza en las universidades e institutos, como capacitaciones en la formación en servicio para el desarrollo de las habilidades cognitivas y de oportunidades de aprendizaje que generen ventajas cognitivas en la formulación de tareas con enunciados matemáticos verbales auténticos. Finalmente, se debe promover más investigaciones sobre la formulación de problemas en la enseñanza de las matemáticas y cómo rediseñan los docentes sus tareas auténticas con la finalidad de ayudar a reinterpretar sus materiales curriculares (Cai *et al.*, 2020; Passarella, 2021), con procesos de retroalimentación y argumentación en la resolución de problemas que realizan los docentes a los estudiantes de manera personalizada (Peña *et al.*, 2021). Ya que la enseñanza actual está más enfocada en el dominio de la materia, más que el valor del contenido que sería importante seguir abordando desde un enfoque cualitativo, las características y principios del modelo del pensamiento matemático realista (Trung *et al.*, 2019). Así como también realizar un análisis semántico de los enunciados PAEV, elaborados por los docentes que este estudio no alcanzó a realizar.

A modo de conclusión, en este estudio, se ha descrito el conocimiento especializado en la elaboración de problemas auténticos, comprobando una ventaja relativa de los docentes en servicio sobre los de formación inicial, al incorporar contextos cercanos y significativos. Además, las discusiones grupales han contribuido al análisis en la comprensión matemática, generados a partir de experiencias situadas, integradas y flexibles; que fortalecieron su desarrollo profesional al crear oportunidades para el aprendizaje.

Sin embargo, se sugiere potenciar las competencias del profesorado en formación inicial para pasar del conocimiento y comprensión conceptual a tareas complejas que permitan integrar el conocimiento, la generalización y la justificación de argumentos ligados a una tarea auténtica y realista en la formulación de enunciados matemáticos, además de mejorar el conocimiento aplicando diversas teorías de instrucción para el desarrollo de conceptos y aplicaciones matemáticas.

REFERENCIAS

Adjie, N., Putri, S. U., y Dewi, F. (2021). Improvement of Basic Math Skills Through Realistic Mathematics Education (RME) in Early Childhood. *Jurnal Obsesi: Jurnal Pendidikan Anak Usia Dini, 6*(3), 1647–1657. https://doi.org/10.31004/obsesi.v6i3.1832

Anthony, G. y Walshaw, M. (2009). Characteristics of Effective Teaching of Mathematics: A View from the West. *Journal of Mathematics Education, 2*(2), 147-164

Cáceres, M. J., y Chamoso, J. M. (2017). *Percepción del realismo en las resoluciones de estudiantes para maestro de una tarea geométrica realista*. CIBEM. Madrid.

Cáceres, M. J., Chamoso, J. M., y Cárdenas, J. A. (2015). Situaciones problemáticas auténticas propuestas por estudiantes para maestro. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 201-210). SEIEM.

Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., Zhang, L., y Song, N. (2020). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' conceptions on problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research, 102*, 101404. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01252-3

Cancelo Ll., Ó. (2019). *Análisis de las tareas propuestas por las Pruebas ESCALA atendiendo al grado de autenticidad, realismo y dominios cognitivos*.

Carotenuto, G., Di Martino, P., y Lemmi, M. (2021). Students' suspension of sense making in problem solvingZDM. *Mathematics Education, 53*(4), 817–830. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01215-0

Chamoso, J. M., y Cáceres, M. J. (2018). Propuesta de tareas matemáticas en contextos reales de estudiantes para maestro. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 0*(17), 83–94.

Chamoso, J. M., y Cáceres, M. J. (2019). Creación de tareas por futuros docentes de matemáticas a partir de contextos reales 1. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18, 59–69.

Codreanu, E., Sommerhoff, D., Huber, S., Ufer, S., y Seidel, T. (2020). Between authenticity and cognitive demand: Finding a balance in designing a video-based simulation in the context of mathematics teacher education. *Teaching and Teacher Education, 95*, 103146. https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103146

Csíkos, C., y Szitányi, J. (2020). Teachers' pedagogical content knowledge in teaching word problem solving strategies. *ZDM, 52*(1), 165-178. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01115-y

Cubero-Ibáñez, J., y Ponce-González, N. (2020). Aprendiendo a través de Tareas de Evaluación Auténticas: Percepción de Estudiantes de Grado en Educación Infantil. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 13*(1), 41. https://doi.org/10.15366/riee2020.13.1.002

Daroczy, G., Meurers, D., Heller, J., Wolska, M., y Nürk, H. C. (2020). The interaction of linguistic and arithmetic factors affects adult performance on arithmetic word problems. *Cognitive Processing, 21*(1), 105–125. https://doi.org/10.1007/s10339-019-00948-5

Edwar, E., Puteri, R. I. I., y Zulkardi, Z. (2022). Professionalism Development of High School Teachers in Improving the Ability to Implement Realistic Mathematics Education in East OKU Regency. Proceedings of the Eighth Southeast Asia Design Research (SEA-DR) y the Second Science, Technology, Education, Arts, Culture, and Humanity (STEACH) International Conference (SEA-DR-STEACH 2021), 627, 59–63. https://doi.org/10.2991/assehr.k.211229.009

Gerofsky, S. (1996). A Linguistic and Narrative View of Word Problems in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 36–45

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 5–22. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i1.2

Hernandez-Martinez, P., y Vos, P. (2018). "Why do I have to learn this?" A case study on students' experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM Mathematics Education* (50), 245-257. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2

Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2018). Metodología de la investigación: Las rutas de la investigación. En Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. http://www.biblioteca.cij.gob.mx/Archivos/Materiales_de_consulta/Drogas_de_Abuso/Articulos/SampieriLasRutas.pdf

Herrera, C. D. (2018). Qualitative research and thematic content analysis. Intellectual orientation of Universum journal. *Revista General de Informacion y Documentacion, 28*(1), 119–142. https://doi.org/10.5209/RGID.60813

Hiebert, J., y Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*(1), 371-404.

Isik, C., y Kar, T. (2012). The analysis of the problems posed by the pre-service teachers about equations. *Australian Journal of Teacher Education (Online), 37*(9), 93-113. http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2012v37n9.1

Kohen, Z., y Orenstein, D. (2021). Mathematical modeling of tech-related real-world problems for secondary school-level mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 107*(1), 71-91. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10020-1

Koray, M. (2019). Analysis of the Problems Posed by Pre-Service Primary School Teachers in Terms of Type, Cognitive Structure and Content Knowledge. *International Journal of Educational Methodology, 5*(4), 577–590. https://doi.org/10.12973/ijem.5.4.577

Kurshumlia, R., y Vula, E. (2021). Using reciprocal teaching for improving students' skills in mathematical word problem solving - a project of participatory action research. *European Journal of Educational Research, 10*(3), 1371-1382. https://doi.org/10.12973/eu-jer.10.3.1371

Li, X., Song, N., Hwang, S., y Cai, J. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: Teachers' beliefs and performance on problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 325-347. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09981-0

Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar Em Revista, 50*, 117–133. https://doi.org/10.1590/s0104-40602013000400009

López, N., y Sandoval, I. (2016). Métodos y técnicas de investigación cuantitativa y cualitativa. http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/176

López-Roldán, P., y Fachelli, S. (2016). Parte III. Análisis. Capítulo III. 11. Análisis Factorial. Metodología de la investigación social cuantitativa, 140. http://ddd.uab.cat/record/142928

Martin, L., y Gourley-Delaney, P. (2014). Students' images of mathematics. *Instructional Science, 42*(4), 595-614. https://doi.org/10.1007/s11251-013-9293-2

Martínez-Padrón, O. (2021). El afecto en la resolución de problemas de Matemática. *Revista Caribeña de Investigación Educativa RECIE, 5*(1), 86-100. https://doi.org/10.32541/recie.2021.v5i1.pp86-100

Miller, R. (2012). *A Guide to Authentic E-learning – By Jan Herrington, Thomas C. Reeves, and Ron Oliver.* Sigmund Tobias and Thomas Duffy. https://doi.org/10.1111/j.1467-9647.2012.00798

Mullis, I. V. S., y Martin, M. O. (2018). Ministerio de Educación y Formación Profesional. https://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/204443/TIMSS2019.pdf?sequence=1yisAllowed=y

Orrantia, J., González, L. B., y Vicente, S. (2005). Analysing arithmetic word problems in primary education text books. *Infancia y Aprendizaje, 28*(4), 429–451. https://doi.org/10.1174/021037005774518929

Palm, T. (2008). Performance assessment and authentic assessment: A conceptual analysis of the literature. *Practical Assessment, Research and Evaluation, 13*(4), 1–11. https://doi.org/10.7275/0qpc-ws45

Palm, T., y Nyström, P. (2009). Gender Aspects of Sense Making in Word Problem Solving. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 59–76.

Pappas, M. A., Polychroni, F., y Drigas, A. S. (2019). Assessment of mathematics difficulties for second and third graders: Cognitive and psychological parameters. *Behavioral Sciences, 9*(7), 76. https://doi.org/10.3390/bs9070076

Paredes, S., Cáceres, M. J., Diego-Mantecón, J. M., Blanco, T. F., y Chamoso, J. M. (2020). Creating realistic mathematics tasks involving authenticity, cognitive domains, and openness characteristics: A study with pre-service teachers. *Sustainability (Switzerland), 12*(22), 1–17. https://doi.org/10.3390/su12229656

Passarella, S. (2021). Emergent modelling to introduce the distributivity property of multiplication: a design research study in a primary school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(10), 2774-2796. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1910869

Peña, C. M. L., Huisacayna, M. V. P., Talavera-Mendoza, F., y Serrano-Rodriguez, R. (2021). Interactive and Ubiquitous Audiovisual Media in Solving Verbal Arithmetic Problems. Proceedings - 11th International Conference on Virtual Campus, JICV 2021, 12–15. https://doi.org/10.1109/JICV53222.2021.9600421

Ramírez Ortiz, Sandra Milena, y Artunduaga Cuéllar, Marco Tulio. (2018). Authentic Tasks to Foster Oral Production Among English as a Foreign Language Learners. *How, 25*(1), 51-68. https://doi.org/https://doi.org/10.19183/how.25.1.362

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. Ed. Aljibe.

Sevinc, S. y Lesh, R. (2021). Preservice mathematics teachers' conceptions of mathematically rich and contextually realistic problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *25*, 667-695. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09512-5

Strohmaier, A. R., Reinhold, F., Hofer, S., Berkowitz, M., Vogel-Heuser, B., y Reiss, K. (2022). Different complex word problems require different combinations of cognitive skills. *Educational Studies in Mathematics, 109*(1), 89-114. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10079-4

Tamayo, G. (2001). Diseños muestrales en la investigación. *Semestre Económico, 4*(7). https://revistas.udem.edu.co/index.php/economico/article/view/1410

Trung, N. T., Thao, T. P., y Trung, T. (2019). Realistic mathematics education (RME) and didactical situations in mathematics (DSM) in the context of education reform in Vietnam. *Journal of Physics: Conference Series, 1340*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1340/1/012032

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. Springer: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Vásquez, C., García-Alonso, I., Seckel, M. J., y Alsina, Á. (2021). Education for Sustainable Development in Primary Education Textbooks-An Educational Approach from Statistical and Probabilistic Literacy. *Sustainability, 13*(6). https://doi.org/10.3390/su13063115

Vásquez, C., y García-Alonso, I. (2020). La educación estadística para el desarrollo sostenible en la formación del profesorado. *Profesorado, Revista De Currículum Y Formación Del Profesorado, 24*(3), 125-147. https://doi.org/10.30827/profesorado.v24i3.15214

Verschaffel, L., Greer, B., y de Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets y Zeitlinger B. V.

Vicente, S. y Manchado, E. (2017). Dominios de contenido y autenticidad: un análisis de los problemas aritméticos verbales incluidos en los libros de texto españoles. *Revista de la Universidad de Granada, 11*(4), 253-279. https://doi.org/10.30827/pna.v11i4.6242

Yeo, J. B. (2017). Development of a Framework to Characterise the Openness of Mathematical Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education 15*(1), 175-191. 10.1007/s10763-015-9675-9

Yilmaz, R. (2020). Prospective Mathematics Teachers Cognitive Competencies on Realistic Mathematics Education. *Journal on Mathematics Education, 11*(1), 17-44. https://doi.org/10.22342/jme.11.1.8690.17-44

Autor de correspondencia

MIRIAM DEYSI BAUTISTA LOPEZ

Dirección postal: Facultad Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, UNSA Campus Sociales, Calle San Agustín, Arequipa, CP 04002, Arequipa, Perú
mbautistalo@unsa.edu.pe

Teléfono: (+51) 927 886 818

 https://doi.org/10.24844/EM3502.06

Acuerdos institucionales, trayectorias de aprendizaje y recorridos de enseñanza. Discusiones en un grupo de trabajo colaborativo entre maestros e investigadores en didáctica de la matemática

Institutional agreements, learning trajectories, and teaching journeys. Discussions within a collaborative work group between teachers and researchers in mathematics education

María Mónica Becerril,[1] Patricia García,[2] María Paula Pérez,[3] María Emilia Quaranta,[4] Patricia Sadovsky[5]

Resumen: Se presentan resultados de una investigación desde una perspectiva colaborativa que venimos desarrollando a partir de 2012. Al comenzar el cuarto año de funcionamiento de este grupo, en una de las escuelas, las maestras subrayaron la necesidad de trabajar más coordinadamente entre los grados y, en consecuencia, establecer acuerdos. La profundización de esta inquietud derivó en un proceso de discusión que condujo a la necesidad de asumir colectivamente los problemas de enseñanza como práctica sistemática que, desde el equipo de investigación, denominamos *estado de acuerdo*. Esta modalidad habilita la construcción de una *memoria didáctica institucional* que se transforma en referencia para pensar *recorridos de enseñanza* en diálogo con las trayectorias de aprendizaje.

Fecha de recepción: 04 de abril de 2022. **Fecha de aceptación:** 20 de abril de 2023.

[1] Universidad Pedagógica Nacional. Unipe, monicabece@gmail.com, orcid.org/ 0000-0002-3922-447X.
[2] Universidad Pedagógica Nacional. Unipe, garciapatricia059@gmail.com, orcid.org/0000-0002-6247-0310.
[3] Universidad Pedagógica Nacional. Unipe, mpaulaperez48@gmail.com,orcid.org/0000-0001-9190-132X.
[4] Universidad Pedagógica Nacional. Unipe, memiliaquaranta@gmail.com, orcid.org/0000-0002-3760-2369.
[5] Universidad Pedagógica Nacional. Unipe, patsadov@gmail.com, orcid.org/0000-0001-6703-3315.

Palabras clave: *Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores – análisis de las prácticas de enseñanza de la matemática – acuerdos institucionales – trayectorias de aprendizaje y enseñanza – memoria didáctica.*

Abstract: We present the results of an investigation on collaborative work between elementary school teachers and specialists in mathematics education, regarding problems in teaching and learning mathematics, developed since 2012. In our 4th year of collaborative work, in one of the schools we worked with, teachers brought up the need to work in a more coordinated way between grades and, consequently, to establish agreements. As a result of our analysis, the way in which agreements are conceived in schools gave rise to a notion that we named state of agreement that accounts for a collective way to assume the problems of teaching and learning. This practice enabled the development of an institutional pedagogical memory, which is a referent for the teaching trajectories in dialogue with learning trajectories.

Keywords: *Collaborative work between teachers and researchers - analysis of mathematics teaching practices -institutional agreements - teaching and learning trajectories - pedagogical memory.*

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios que nuestro equipo viene realizando desde 2012 se inscriben en una perspectiva colaborativa entre investigadores y docentes (Bednarz, 2004; Bednarz y Proulx, 2010; Desgagné *et al.*, 2001). Más específicamente, constituimos en distintas escuelas primarias espacios de trabajo entre integrantes de nuestro equipo y maestros y directivos de la escuela, cada uno de los cuales se reúne periódicamente con el propósito de analizar, de manera conjunta, cuestiones de enseñanza de la matemática que los docentes reconocen en sus prácticas así como explorar estrategias de intervención en las aulas que atiendan a las elaboraciones realizadas. Los espacios colaborativos que se organizan –nuestros casos de estudio– constituyen una creación a los fines de la investigación. No tienen existencia previa en las escuelas y los equipos directivos abren la posibilidad de su funcionamiento en el marco institucional. De manera general, la producción matemático-didáctica de los grupos en los que participamos y la problematicidad inherente a la construcción de la colaboración (Sadovsky *et al.*, 2015; Sensevy, 2011) constituyen los ejes de nuestra investigación. En cada espacio colaborativo se construye una historia única, propia, y la reflexión sobre sus alternativas nos permite, además de dar cuenta del tipo de producción sobre la enseñanza de la matemática que allí tiene lugar, hacer inteligible algún aspecto del funcionamiento escolar (Passerron y Revel, 2005).

¿Cómo se van configurando las discusiones? El tratamiento de cierta cuestión en cada espacio colaborativo suele comenzar a partir de la propuesta de algún o algunos docentes que la presentan al grupo, normalmente porque encuentran desacoples entre lo que esperan y lo que sucede en las aulas con respecto a un asunto de enseñanza de la matemática. Para ello, relatan episodios de clase que ayudan a comunicar y precisar las cuestiones que les inquietan y aportan también materiales que dan cuenta de la actividad desarrollada: tareas planteadas, producciones de los alumnos, idas y vueltas en el accionar de los niños, preguntas que ellos formulan, momentos que fueron desconcertantes para los maestros. El resto de los integrantes del equipo, con sus preguntas, comentarios y referencias a su propia experiencia, contribuye a armar una conversación que tiene como propósito configurar la cuestión a la que el grupo se va a abocar.

El análisis de las producciones de las y los alumnos en términos de los conocimientos en juego constituyó, en todos los casos, un núcleo fundamental para la producción de conocimientos en cada espacio colaborativo: fue posible realizar hipótesis respecto de los saberes de las y los niños y elaborar estrategias de intervención consistentes con esas hipótesis. Hemos dado cuenta en otros trabajos de la riqueza de esta tarea en la que docentes e investigadores nos involucramos en un trabajo analítico compartido a partir del cual vamos logrando desarrollar una actividad reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje (Sadovsky *et al.*, 2016).

Las conversaciones del grupo colaborativo sobre los problemas que se van tratando se retoman una y otra vez a lo largo del tiempo, proceso que se ve favorecido por el funcionamiento sostenido del grupo durante varios años.[6] Estos plazos promueven la construcción de ideas, su revisión y resignificación a la luz de nuevos problemas que van emergiendo como resultado de la colaboración. Al mismo tiempo, permiten construir paulatinamente una confianza necesaria para superar las históricas divisiones sociales del trabajo entre el mundo académico y el mundo de las prácticas. Participar en una mesa de discusión de manera sistemática y sostenida en el tiempo, en la institución en la que se

[6] En todos los casos, los grupos colaborativos se han sostenido por lo menos tres años.

trabaja, junto con las y los compañeros que comparten cotidianamente la tarea, permite configurar más claramente, como acabamos de decir, la dimensión institucional de aquello que sucede en cada uno de los grados.

En este marco encuadramos la producción en la Escuela 30 en la que, en el cuarto año de intercambios, en el grupo colaborativo, el análisis de las producciones de las y los alumnos, que ya se venía realizando, da lugar a nuevos interrogantes de distinto orden que comprometen las prácticas docentes. Algunos se refieren de una manera directa a la intervención docente más inmediata, por ejemplo, si todos los procedimientos se van a poner en común, qué ideas, qué conocimientos va a aportar la maestra a partir de ellos. Otros, se vinculan con las trayectorias de aprendizaje de los alumnos: ¿es razonable aceptar, por ejemplo, que en tercer grado los chicos sigan haciendo conteo para abordar problemas aditivos?, ¿se resolvería la cuestión solo con una distribución de los procedimientos exigibles o estrategias en las cuales hacer hincapié en cada año escolar?, ¿qué intervenciones docentes podrían promover avances en la relación de los chicos con el conocimiento?, ¿es posible acordar –y sostener– que en cierto momento no se admitirán determinados modos de hacer de los niños?, ¿qué aporta asumir ese compromiso?, ¿qué obstáculos puede generar?, ¿qué flexibilizaciones admiten estas asunciones?, ¿qué equilibrios se requieren para considerarlas y a la vez preservar la intención de hacer avanzar los conocimientos de todas y todos los alumnos?

Estas últimas cuestiones exceden decisiones puntuales y requieren ser retomadas una y otra vez, para repensar las trayectorias de un grado y entre los grados. Señalemos que hay distintas temporalidades comprometidas en las discusiones que se van armando al analizar colectivamente las producciones de las y los alumnos y que algunas de esas cuestiones, cuando se desarrollan, llevan a tomar conciencia tanto de los condicionantes del dispositivo escolar como del carácter colectivo de la enseñanza. Preguntas como las anteriores llevaron a reconocer la necesidad de mayor coordinación en las opciones sobre la enseñanza que se realizan de grado a grado. "El chico es el mismo, va haciendo un recorrido, es necesario acordar", planteó una de las maestras. Pero, ¿qué sería *acordar* en el contexto en que surge esta idea?, ¿cómo se articularían estos acuerdos que implican un accionar coordinado con las decisiones individuales de cada maestra?, ¿qué reconfiguración institucional implicaría?, ¿cuáles serían las relaciones entre los problemas relevados sobre el recorrido didáctico de los alumnos y la intención de *acordar*?

En este artículo proponemos una idea, la de *estado de acuerdo* sobre la enseñanza, elaborada a partir del análisis de las discusiones en la Escuela 30.[7] Nos parece que contribuye a revisar el modo en que la escuela históricamente, asentada en su estructura graduada, ha concebido el tránsito de las y los niños a lo largo de su escolaridad. Efectivamente, se ha naturalizado un hecho que hoy vemos algo paradojal: se supone una continuidad en los aprendizajes de los alumnos de un año a otro y, al mismo tiempo, para cada maestra o maestro, el año empieza *casi de cero*[8] con relación a lo que conoce de las y los alumnos. Las discusiones del espacio colaborativo de la Escuela 30 nos ayudaron a comprender la importancia y el sentido que tienen, para repensar las trayectorias escolares, los acuerdos sobre la enseñanza entre maestros cuando se realizan *desde adentro* de las prácticas. Los diferenciamos, además, de otros tipos de acuerdos, más frecuentes en las escuelas, que se basan en la distribución de contenidos por grados, sobre la base de las prescripciones curriculares. Al realizar ese contrapunto, se visibiliza la problematicidad que tiene concebir las aulas como espacios que alojan alumnas y alumnos con diferentes relaciones con los saberes y conocimientos.

2. MARCO TEÓRICO

La pregunta por la participación de las y los docentes –su viabilidad, su potencia– en la producción de conocimiento sobre la enseñanza que ellas y ellos mismos desarrollan en sus aulas fue tomada como problema de indagación por numerosos grupos de investigación que han asumido una perspectiva colaborativa entre investigadores y docentes desde hace más de veinticinco años. Un enunciado general da cuenta del proyecto: se trata de estudiar *con* los docentes y no *sobre* los docentes (Bednarz, 2013). Lo asumimos en nuestro trabajo.

Ahora bien, como ha sido analizado por numerosos investigadores, la estructura del dispositivo escolar en tanto configuración estratégica que articula diversos elementos –selección de contenidos, organización temporal y espacial de los saberes, agrupamientos de la población escolar, enunciados psicopedagógicos, entre muchos otros–, moldea de manera estable las prácticas educativas (Trilla,

[7] La idea de *estado de acuerdo* no ha sido formulada en estos términos en el espacio colaborativo, es una reconceptualización del equipo de investigación a partir de las conversaciones con este grupo de maestras.

[8] Usualmente se transfiere información sobre las y los alumnos entre las y los docentes de un año a otro. Esta acción se restringe a un momento puntual que hace difícil para el o la maestra nueva hacerse una idea de la situación de cada alumno.

1985; Varcellino, 2020; Chevallard y Johsua, 1985). Aunque algunos de estos componentes se han ido flexibilizando en los últimos años (Dussel, 2006), otros persisten, como el papel del tiempo didáctico en la estructuración de los saberes o los modos de controlar los aprendizajes. Frente a esta persistencia, los docentes quedan atravesados por la contradicción que supone, por una parte, recibir desde las políticas públicas directivas de impulsar una mayor autonomía intelectual de las y los alumnos en sala de clase y gestionar estrategias para asegurar la inclusión de *todas y todos* y, al mismo tiempo, quedar sujetos a estos *condicionantes duros* del sistema escolar (Baquero y Terigi, 1996).

En este sentido, encaramos nuestro estudio bajo la hipótesis de que la aproximación colaborativa, por el hecho de proponer un trabajo reflexivo conjunto entre maestros e investigadores que problematiza aspectos de las prácticas de enseñanza relevados por los mismos docentes genera la posibilidad de hacer visibles esos condicionantes duros del dispositivo escolar y permitir así, su revisión llevando a "ampliar los márgenes de maniobra" de los actores en el marco institucional (Robert y Rogalski, 2002). En otros términos, esos márgenes de maniobra se construyen, se elaboran, se conquistan desde adentro de las prácticas mismas. Sostenemos que la reconstrucción sistemática y permanente de los hechos de las clases, en términos de significados en juego, de rupturas en la comunicación, en un proceso de reflexión conjunta a partir de algunas trazas de la actividad de enseñanza en sala de clase pone en evidencia hasta qué punto los condicionamientos de la organización escolar afectan el trabajo de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las y los alumnos. Este análisis crítico de las regulaciones institucionales da lugar a la habilitación de nuevos posibles para la acción. Las y los docentes toman una posición instituyente en el marco de su institución (Tomasello y Sensevy, 2015). Como dice Yves Clot (2008), ciertos límites impuestos por la organización escolar pueden ser superados "si se construye una historia común de reorganización del trabajo colectivo por parte del colectivo de trabajo". En nuestro caso, por ejemplo, se hicieron visibles las relaciones entre tiempo didáctico, saberes, conocimientos y aprendizajes, y estos elementos estuvieron presentes en la gestación de los acuerdos, acerca de los cuales damos cuenta en este artículo.

Ha sido muy estudiada –y desde diferentes dimensiones– la cuestión del desarrollo temporal de los saberes en la escuela y los condicionamientos que plantea con relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje (Chevallard, 1997; Brousseau y Centeno, 1991; Tomasello y Sensevy, 2015). A propósito del presente trabajo, nos detenemos en la organización curricular del área de matemática en la escuela primaria en nuestro país, a través de la cual, campos conceptuales (Vergnaud, 1991) que abarcan distintos años de la escolaridad se segmentan en tramos para enseñar en cada grado y se predeterminan los tiempos para su tratamiento. Aunque en la práctica estas condiciones no se cumplen taxativamente, sí están presentes como referencia en el accionar de las y los maestros que muchas veces regulan en función de ellas sus decisiones de enseñanza.

G. Brousseau y J. Centeno (1991) introducen el concepto de *memoria didáctica* al preguntarse sobre la influencia en el aprendizaje de las referencias que la o el docente puede hacer, en un momento dado, al pasado "matemático" de las y los estudiantes. Estos autores sostienen que la evocación de la experiencia de los alumnos interviene de manera decisiva en el aprendizaje:

> ¿De qué manera se manifiesta, en el acto de enseñar, el hecho de que los alumnos hayan incorporado o no anteriormente ciertos conocimientos? ¿Se puede decidir un acto de enseñanza ignorando lo que los alumnos han hecho previamente? Y si no, ¿dónde está inscripto el recuerdo de lo que hicieron?, ¿en el legajo individual de los alumnos?, ¿en el nivel que alcanzan?, ¿o, por el contrario, únicamente en el programa o punto al que llegaron en un momento dado? (Brousseau, 1994, citado en Sadovsky, 2005; pp. 57-58)

Las ideas expresadas en esta cita llaman la atención sobre la necesidad de tomar en cuenta la experiencia de las y los alumnos en el marco de las contextualizaciones didácticas con las que han interactuado cuando se les propone el estudio de nuevas cuestiones y plantea la insuficiencia de referirse a esa experiencia solo en términos de "temas" trabajados. En este último caso, suele ocurrir que las y los alumnos no reconocen haber estudiado un asunto que sí estudiaron, simplemente porque es evocado de un modo que no tiene en cuenta las situaciones específicas en las que tuvieron oportunidad de aprenderlo.

Entendemos que el concepto de *memoria didáctica,* con el sentido en que acaba de ser referido, abre una búsqueda respecto de estrategias posibles que favorecerían la posibilidad de que maestras y maestros pudieran retomar más claramente en su enseñanza el pasado de sus alumnas y alumnos con relación al conocimiento permitiéndoles establecer puentes entre lo ya aprendido y lo nuevo. En esa búsqueda se ubica la idea de *estado de acuerdo* que proponemos en este trabajo.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Como venimos señalando en diferentes artículos (Sadovksy *et al.*, 2015a; Sadovsky *et al.*, 2015b; Sadovsky *et al.*, 2016; Sadovsky *et al.*, 2019; Quaranta *et al.*, 2021a; Quaranta *et al.*, 2021b), la aproximación colaborativa supone una transformación en los modos de intercambio entre investigadores y docentes, históricamente configurados en el campo educativo según las dicotomías teoría-práctica, medios-fines (Sensevy, 2011). En este sentido, la colaboración requiere tejer un tipo de vínculo horizontal cuyas características no se conocen a priori y hace necesario prestar especial atención a las opciones metodológicas que se van haciendo y que son, por esa misma razón, constitutivas de la colaboración. Esta perspectiva nos ha llevado a asumir algunos puntos de partida, pero a la vez nos ha exigido una búsqueda y, por lo tanto, una reflexión permanente sobre el desarrollo de los intercambios a partir de los cuales hemos producido nuevas aproximaciones metodológicas para la colaboración. Es decir, muchos de los rasgos de corte metodológico tienen para nuestro trabajo, carácter de resultado.

Los investigadores cumplen una doble función: participan como integrantes del espacio colaborativo y conceptualizan las elaboraciones que allí tienen lugar. Cada reunión es grabada y, sobre la base de su desgrabación, se elabora una síntesis cuya lectura y discusión con los docentes inaugura la reunión siguiente. Estas síntesis no son *descripciones de hechos lo más neutras posibles* sino que contienen elementos interpretativos que el equipo de investigación somete a la discusión y a su validación en el grupo de trabajo colaborativo. Este procedimiento habilita la posibilidad de retomar las discusiones introduciendo nuevos elementos que van constituyendo un marco compartido de trabajo (Dubet, 2007). Se dispone así de una herramienta que cumple una función de objetivación que permite a cada participante dialogar con sus propias ideas y las del grupo, revisarlas, reelaborarlas, confirmarlas o transformarlas. A la vez, esta metodología interviene en la creación de un clima de confianza en tanto es un instrumento que hace visible la recuperación de todas las ideas que se vuelcan en el grupo.

La incorporación de nuevas maestras al espacio colaborativo –normalmente a principio de año– constituye una oportunidad para volver sobre las conceptualizaciones del grupo. A modo de ejemplo, damos cuenta de una de estas instancias, ocurrida en el año 2019, cuarto año de funcionamiento del grupo de la Escuela 30. Se incorporan en ese momento las maestras de 5° y 6° grado. Todas las antiguas integrantes –maestras, directora, investigadoras– ponen especial cuidado en transmitir el sentido del grupo. Este esfuerzo de síntesis comporta una verdadera reconstrucción. el esfuerzo por elaborar, a partir del análisis de las situaciones puntuales, ideas más generales que aporten a la construcción de una mirada común ("construir distintas interpretaciones sobre lo que nos pasa en la clase, sobre lo que los pibes hacen, sobre nuestras decisiones, sí, nos abre la mirada").

Las consideraciones se fueron combinando con numerosas alusiones a la confianza tejida a lo largo del tiempo entre las participantes, entrelazada con el mismo trabajo de análisis:

> No estamos empezando de cero, tenemos bastante acumulado, muchas cosas discutidas y fundamentalmente la construcción de confianza que, por supuesto, nos llevó tiempo. Es un espacio en el que podemos no estar de acuerdo, disentir, contar lo que nos pasa, lo que hacemos en la clase.

Por otra parte, cuando el grupo de investigación analiza las desgrabaciones de las reuniones e interpreta que hubo cuestiones que quedaron sin concluir o desacuerdos sin saldar, retoma esos registros y lo ofrece como documento de trabajo a todo el espacio colaborativo. Esto actualiza las discusiones y ubica como objeto de análisis las conversaciones sostenidas en ese espacio y no solo los registros de las clases. En este sentido estas instancias constituyen también momentos importantes de reconstrucción de ideas.

4. ESTAR EN ACUERDO

> *Y sin querer nos empezó a pasar que, más allá de estos espacios de reunión, nos encontrábamos en los recreos hablando de lo que nos pasaba en el aula con ciertas cosas. Esto nos sorprendió.* Maestra, en una reunión del grupo.

La propuesta de establecer acuerdos recoge las preocupaciones por las trayectorias de aprendizaje. De las transiciones de grado a grado, de los progresos a lo largo de un grado y de los recorridos de cada alumna o alumno. A veces deriva más claramente de una cierta ruptura entre las expectativas de algunas maestras con relación a los desempeños de *sus* alumnos y lo que los niños logran mostrar en el trabajo de las aulas. Ruptura que, en un primer momento, genera incomodidad pero que, en el marco de las conversaciones del grupo va dando lugar a una necesidad: repensar colectivamente qué se espera, pero también qué se enseña, qué se exige en cada grado y cómo retomar la experiencia ya transitada por los niños para hacerla crecer.

Con las producciones de las y los alumnos sobre la mesa, la cuestión que involucra al grupo es analizarlas en función de la complejidad de las relaciones aritméticas que subyacen a ellas, discutir si tiene sentido inhabilitar algunas que se consideran para una cierta altura de la escolaridad demasiado básicas o promover con más contundencia la incorporación de otras más elaboradas. La siguiente cita ilustra esta cuestión a propósito del pasaje del conteo al cálculo:

> En los primeros grados está instalado que cuentan desde la grilla, pero no pueden quedarse allí...Tenemos que buscar que salgan de la grilla y que ya no sea cómodo usar solamente la grilla. (M3[9]).

Subyace a esta intervención el propósito de buscar situaciones didácticas –problemas, intercambios, intervenciones docentes– en las que los chicos encuentren un límite para el conteo. Se plantea como problema de enseñanza compartido para el cual es necesario encontrar una estrategia. Se va instalando como asunto común del grupo.

La idea del *acuerdo como referencia* se va fortaleciendo al calor del intento de sistematizar los datos que se van recogiendo de las aulas. Como informamos en otro trabajo (Quaranta *et al.*, 2021b), en cierto momento, para "saber dónde estamos paradas" –así fue planteado–, el grupo de maestras propone realizar colectivamente una indagación sobre la base de las producciones de las y los alumnos a raíz de un problema aritmético. Se dedican varias reuniones a analizar y organizar los datos recogidos y se valoriza la función de referencia que cumple esa sistematización para establecer acuerdos:

> I:[10] Estamos siguiendo la idea de M3, que ya hace dos reuniones, creo, si no me equivoco, y además antes, años atrás, también hablabas [a M3] de acciones institucionales. Esto también muy enlazado con tu idea de empezar a elaborar juntas un registro institucional de nuestras acciones y nos parece que esta es una oportunidad privilegiada para hacerlo.
>
> M4: Pero no solo un registro hacia atrás de lo que uno va aplicando, sino para llegar a acuerdos a futuro, de cuáles deberíamos compartir, me parece, ¿no?
>
> I: Ese sería un norte, claro.

[9] Cada docente es designada de este modo, con el número del grado a su cargo.

[10] Investigadora.

M3: Porque vos no recibís todos los años al mismo chico y con los mismos procesos. Pero vos empezás con un cimiento y, a partir de eso, podés construir sobre esa base.

Por un lado, la propuesta de realizar acuerdos deja ver la posibilidad de elaborar un registro institucional del accionar de enseñanza, que se nutra de las prácticas desarrolladas y constituya un punto de apoyo para proyectar acuerdos. Notemos que la investigadora recoge intervenciones de otras conversaciones del grupo –incluso de otros años– que se sintetizan ahora a raíz del análisis de los datos recogidos intencionalmente por las maestras para contar con una especie de *estado de situación* con relación a los procedimientos aritméticos de las y los alumnos. Este hecho fortalece la hipótesis según la cual el análisis crítico de las propias prácticas de enseñanza sobre la base de documentación del aula abre la posibilidad de cuestionar una visión de la enseñanza como hecho individual, uno de los núcleos duros del funcionamiento escolar. Asimismo, a medida que la discusión avanza, se afina el contenido de los acuerdos, no se trata solo de habilitar o prohibir cierta estrategia sino de conocer qué experiencias han transitado las y los niños para tomarlas como referencia para nuevas situaciones didácticas.

En la perspectiva de considerar las estrategias de las y los alumnos, preocupa a las maestras el uso "mecánico" que muchas y muchos hacen de los algoritmos convencionales de cálculo. Las inquieta que no puedan explicar por qué "se llevan uno" en una suma, o "piden al compañero" en una resta o "bajan el cinco" en una división, por ejemplo. A la vez, coinciden en pensar que son saberes que deben conocer y dominar, sobre todo de cara a la escuela secundaria. Las conversaciones en el grupo habilitan propuestas al respecto:

M4: Yo estaba pensando... me imaginaba el algoritmo de la resta y digo, ¿y si arriba del algoritmo le escribimos el valor de las cifras? Porque yo llego a la conclusión que la utilización del algoritmo está como instalada, pero no está clara la forma en que funciona... ¿Y si se le agrega información a ese algoritmo estándar que tenemos? Me sorprendí yo misma, a las 4 de la mañana pensando eso.

M3: Nosotras podemos ubicar en otro lugar al algoritmo.

M4: Estoy de acuerdo. Pero no nos olvidemos que los chicos tienen que ir al secundario.

M3: Hay que resignificarlo.

M4: Exactamente, resignificarlo, no descartarlo.

Se vislumbra aquí otra dimensión de los acuerdos: el papel de la enseñanza –de la explicación de las maestras– en la clarificación de procedimientos que las y los alumnos ya dominan pero lo hacen sin el fundamento que ellas esperan. Su foco no está ubicado en la *eficacia* de los procedimientos sino en su *comprensión*. Se hace visible acá un sentido formativo que las maestras atribuyen al trabajo en matemática, que va más allá del éxito en la resolución de procedimientos y para el cual –también– son necesarios acuerdos de enseñanza (Lerner, 2007; 2007b).

Desde una mirada global de los registros de las reuniones, interpretamos que la preocupación por los avances entre los grados y el foco en la comprensión de los procedimientos van constituyendo ejes de la conversación. Se espera que las y los niños dominen estrategias cada vez más elaboradas (más económicas, más adaptadas a problemas complejos, más cercanas a los saberes culturalmente establecidos) y, simultáneamente, las maestras coinciden en la necesidad de pensar cómo lograr que todas y todos los alumnos puedan participar activamente de los intercambios de la clase. La naturaleza del acuerdo que así se configura comporta algunos criterios básicos que constituyen tanto el núcleo de un compromiso compartido como la disposición a reelaborarlos a partir de las lecturas que se van haciendo –personal y colectivamente– del desarrollo de la enseñanza en cada aula.

Un caudal de preguntas se plantea cuando se habla de la dinámica de trabajo en cada grado: ¿cómo coordinar procedimientos muy elaborados con otros mucho más rudimentarios?, ¿y tiempos de resolución que no coinciden? Entre las estrategias implementadas por las y los alumnos, ¿cuáles seleccionar para compartir en el espacio colectivo de la clase?, ¿por qué?, ¿cómo integrar a las y los niños que no llegan a comprender los procedimientos o explicaciones que se presentan para toda la clase? Las preguntas remiten –una vez más– a los vínculos entre las producciones personales de los chicos sostenidas en distintas relaciones con el saber y la gestión colectiva del conocimiento por parte de las maestras, asunto tratado varias veces. La cuestión se inscribe en una más general: cómo dirigirse a *la clase* concebida como unidad y a *cada alumna o alumno,* con sus singularidades. Todos y cada uno, una dualidad cuya problematicidad se hace visible en los intercambios del espacio colaborativo (Dardot, 2011). Las propuestas se dirigen a todos los chicos pero su desarrollo va mostrando distintas comprensiones, algunas de las cuales es necesario considerar específicamente. A la vez, sabemos que los niños van transformando sus relaciones con el conocimiento mientras participan del espacio colectivo; sin embargo, es casi imposible para una maestra, un maestro, capturar esas transformaciones en el trabajo del aula. Gestionar estos equilibrios requiere tomar decisiones consistentes con las interpretaciones que se van haciendo de los hechos de las aulas, pero que siempre dejan un margen importante de incertidumbre.

La perspectiva teórica según la cual esa diversidad enriquece el trabajo matemático del aula orienta la acción docente hacia estrategias que promueven los intercambios. Sin embargo, no puede ser tomada taxativamente como una regla a aplicar. En esas interacciones podría ocurrir que algunos alumnos, aquellos con una relación más frágil con el conocimiento, queden excluidos o, también, que la difusión de producciones muy básicas no resulte un aporte sustantivo para el conjunto. Nos vemos exigidos a visitar –nuevamente– las complejas relaciones entre teoría y práctica: la hipótesis que sostiene la fecundidad de las interacciones entre los niños que tienen diferentes relaciones con el saber requiere –como siempre– tomar cuerpo a raíz de una lectura del contexto en el que se desarrolla el trabajo. Las derivaciones de esa lectura son necesariamente disímiles.

En síntesis, *estar en acuerdo* es reconocer que la enseñanza de cada uno está enlazada con la de los otros, que un *pacto institucional* elaborado con el aporte de cada integrante actúa como referencia al tiempo que hace visible la necesidad de elaborar intervenciones de enseñanza que desbordan completamente las recomendaciones de los diseños curriculares. *Estar en acuerdo*, por su dimensión colectiva, habilita además una mayor comprensión de los hechos de las aulas.

5. LA NECESIDAD DE ESTABLECER ACUERDOS A PROPÓSITO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN LAS AULAS

La resolución de problemas aritméticos de enunciado por parte de las y los alumnos estuvo presente en los intercambios del grupo como problema de enseñanza desde el inicio. Sin embargo, recién en el cuarto año de trabajo y luego de las tantas conversaciones sobre la necesidad de establecer acuerdos, se toma como asunto colectivo de trabajo. Se van elaborando entonces un conjunto de ideas didácticas para su tratamiento en las aulas que simultáneamente constituyen los elementos de un acuerdo sobre ciertas estrategias que todas las maestras considerarán en su trabajo.

El grupo se aboca entonces a analizar el modo en que los alumnos resuelven los problemas de enunciado. Había una apreciación compartida de que era significativa la cantidad de niñas y niños que mostraban una actitud de dependencia hacia las docentes para abordarlos. Traen a colación una cierta desorientación de las y los estudiantes cuando el enunciado involucra varias operaciones encadenadas. Como era habitual para examinar alguna cuestión, en este caso también se decidió que cada maestra recogiera las producciones de sus alumnos relativas a un problema que propondría específicamente para traer al espacio. Apenas reunidas las hojas de los diferentes grados, al encarar la tarea de analizar los procedimientos, se ponen de manifiesto distintas interpretaciones que van estructurando la conversación. Se abre así una serie de interrogantes que da cuenta de que comprender el trabajo de los alumnos requiere considerar diferentes aspectos que, analizados cada uno y en conjunto, configuran la actividad de resolución de problemas como asunto didáctico.

a) *La observación de las maestras mientras los alumnos resuelven*

Detengámonos en las preguntas que, con el propósito de reconstruir las elaboraciones de los chicos, la directora centralmente pero también otras integrantes, le van formulando a una de las maestras recién incorporada al grupo en la reunión en que se analizaban las resoluciones de sus alumnos: "Después de la explicación inicial, ¿los tuviste que ayudar?, ¿en qué?, ¿cómo?, ¿fueron probando?, ¿se notan cosas borradas en las hojas?, ¿te llamó la atención algo en particular?" La docente concernida se sorprende y advierte que no disponía de elementos para responderlas. El vacío que queda así expuesto cumple una función de producción para el grupo: se habla de la necesidad de interpretar todos esos aspectos del proceso de resolución –las dudas, los intentos, los pedidos de ayuda, las preguntas, los errores–, en términos de los modos de pensar de los alumnos y de analizar cómo promover progresos a raíz de esas interpretaciones. La conversación da cuerpo a una idea que generalmente circula entre las y los maestros pero no siempre se sabe cómo operacionalizar: la importancia de los procesos y no solo de los resultados. Se toma conciencia entonces de la necesidad de permanecer atentas al quehacer de los alumnos mientras trabajan. A medida que transcurre la conversación, la directora llama a "mirar casos concretos" en las hojas de los chicos para enriquecer las interpretaciones.

En la síntesis de esa reunión, se subraya el valor de asumir en el aula una posición expectante con respecto a los procesos de los alumnos:

> En la reunión anterior nos habíamos detenido especialmente en la preocupación que tenemos por la comprensión de los enunciados. Todas, al plantear los problemas en sus clases, hicieron algo para favorecer esa comprensión. Cuando quisimos reconstruir la situación desarrollada por M5, nos costó recuperar cuáles fueron las dudas, los

> bloqueos, los obstáculos o las interpretaciones alejadas de lo que esperábamos. Nos preguntamos cómo tomar nota de esas cuestiones para poder analizarlas después. Nosotras pensamos que esa recuperación puede constituir una base para construir criterios para intervenir, más allá de la situación puntual en la que ocurrieron.

Notemos que tres ideas tratadas en numerosas ocasiones vuelven a destacarse en este texto: la importancia de recuperar los gestos de los alumnos en el proceso de resolución, la necesidad de registrarlos de alguna manera para los análisis posteriores y la posibilidad de proyectarlos más allá del caso específico.

b) *La progresión en la complejidad como problema de enseñanza compartido*

La maestra de segundo grado presenta la situación que planteó a sus alumnos. Comenta que su intención fue hacerles una propuesta que reconocía, de antemano, difícil y traerla al espacio colaborativo como un ámbito donde analizar esa complejidad, comprenderla y elaborar modos de abordarla. Si bien sabía que se "escapaba" de lo que sus alumnos podían resolver con comodidad, la concebía como realizable, tal vez mediante algún procedimiento básico. Tenía conciencia de que la mayoría de los chicos pondrían en juego estrategias elementales pero quería discutir cómo encarar el acceso hacia el uso de las operaciones. Ese fue el núcleo de su planteo en la reunión.[11] Resaltemos la posición exploratoria de esta maestra, en su cuarto año de participación en el espacio, en busca de algo que resultara problemático y necesario de discutir. Acompaña su exposición con las hojas de los niños y relatos de observaciones de los procesos de resolución e interacciones con ellos. Es una base para un diálogo donde las otras participantes buscan obtener mayor precisión sobre los procedimientos de los alumnos y ofrecen sugerencias, abriendo así la posibilidad de que la docente expanda su comentario inicial.

El enunciado que la maestra propuso a la clase:

> Carla preparó 20 porciones de torta. Una señora le compró 7 porciones, otra compró 3 y un nene 5. ¿Cuántas porciones puede vender todavía?

[11] Las consideraciones hacia los chicos que se mostraban ajenos a la tarea siempre estaban presentes en las conversaciones. Hacemos ahora foco en el progreso del conjunto de la clase.

La complejidad del problema, pensando en niños de segundo grado, reside en la necesidad de coordinar tres cálculos sucesivos que requieren retomar los resultados intermedios para continuar. La maestra reconoce allí una fuente de dificultad: "Les costó restar todas las cantidades juntas", y relata que la mayoría de los alumnos apela al conteo para resolverlo. De esta manera, los niños no se ven exigidos de realizar las tres restas como ella esperaba.

Se analiza en detalle la diferencia entre estrategias de conteo y de cálculo. Veamos un tramo del diálogo:

I: El problema, "saco 7, saco 3, saco 5". Si lo resuelvo contando para atrás, primero descuento 7 a partir de 20, llego a 13; a partir de ahí, cuento 3 para atrás, llego a 10 y, finalmente, 5 para atrás, llego a 5. Ahora, si lo resuelvo identificando la operación, hay un asunto, porque tendríamos que hacer 20 menos 7 [anota "20 − 7 = 13"]. Pero, ahora, acá, tenemos un resultado intermedio.

M2: [interrumpiendo] Nuevo.

I: Nuevo. Intermedio. Parcial. Y a este le tengo que restar el que fuere, en este caso 3. [Anota "13 − 3 = 10"]. Ahora tengo un nuevo resultado parcial y voy a operar sobre ese que está otra vez transformado. Y sobre este que ya está transformado, tengo que restar 5 [Anota "10 − 5 = 5"]. Es diferente, si yo cuento en la grilla o en un dibujo para atrás, o simplemente enunciando la serie, paso por el resultado intermedio pero no necesito identificarlo, es como si pasara de largo.

M2: Pasás de largo. Conté 7, conté 3, pero no estoy mirando qué número estuvo en el medio.

Se problematizan, en este intercambio, nuevas relaciones aritméticas involucradas en la resolución del problema de restas "encadenadas" utilizando el cálculo, en contraste con el uso del conteo. La distinción hace visible la mayor dificultad de este tipo de problemas en relación con los que refieren a una única resta. Frente al supuesto de que se trataría de una yuxtaposición de varios sub-problemas más elementales —cada uno involucra una resta—, este análisis pone de relieve que, en la organización de las sucesivas transformaciones, es necesaria una coordinación de las diferentes funciones que cumplen las cantidades intermedias que se van obteniendo. Estas juegan el doble papel de resultado de un paso de la resolución y de dato para continuar (Vergnaud, 1991). En este pasaje también observamos cómo la docente, a partir del aporte de la investigadora y a propósito de lo que hicieron sus alumnas y alumnos, toma conciencia de que el conteo no exige detenerse particularmente en el número parcial al que se llega al "quitar" una cantidad porque se continúa contando directamente.

La conversación deja asomar otra cuestión: ¿alentamos a los chicos a apelar a la operación de resta desde los primeros problemas?, ¿la exigimos?, ¿hasta cuándo "toleramos" el conteo en esos enunciados?

Las preguntas abren a un análisis que considera una diversidad de posibilidades: se acuerda alentar, tal vez exigir para algunos, la realización de cálculos pero también habilitar a procedimientos más básicos para quienes lo necesitan. Nos interesa subrayar el valor de la pregunta como parte de un acuerdo sobre la enseñanza referido a las trayectorias de las y los niños, aunque los modos de considerarla varíen en función de los contextos. Este acuerdo surge a partir del análisis didáctico y va más allá de decidir en qué grado se enseña cada tipo de problema.

En el marco de estas mismas discusiones, la maestra de segundo grado reconoce que los chicos vinculan el *vender porciones* con quitarlas de un total contando hacia atrás pero que esa relación no necesariamente conlleva la identificación explícita de la operación y el cálculo de la resta:

> M2: Los chicos dicen: "yo hice las 20 porciones y le saqué las 7". Tienen la interpretación de que las sacó porque las compró. Pero de ahí a que llegue a que es una resta, de que lo incorporen como resta, ya es... Saben que lo sacan pero...

La conceptualización que se desarrolla respecto de las relaciones aritméticas comprometidas en un enunciado más complejo (restas encadenadas) conduce a problematizar también las que se ponen en juego en uno más sencillo (una única resta). Toda la conversación sobre las relaciones aritméticas involucradas en diferentes estrategias para estos problemas también lleva a la docente de segundo grado a tomar conciencia de que quitar, tachar, contar hacia atrás –procedimientos muy cercanos, casi imitando la situación empírica de venta– no supone en sí mismo el reconocimiento de la operación de resta como posible modelización de la situación. Una vez más, el accionar de las y los niños frente a los problemas da cuenta de la complejidad de las construcciones en juego.

¿Cómo se pasa de proponer a niños de segundo grado problemas que impliquen una única resta, a la realización de otros que supongan la necesidad de encadenar varias operaciones?, cuestión que puso sobre la mesa la necesidad de realizar acuerdos no solo relativos al momento para proponer cada situación sino sobre todo a la necesidad de intervenciones docentes que contribuyan a que los niños se apoyen en las relaciones ya elaboradas para coordinarlas hacia otras más complejas. Vincular explícitamente dos problemas de resta simples con uno que abarca restas encadenadas, lejos de ser una construcción espontánea de alumnas y alumnos, es responsabilidad de las maestras y da cuenta del modo en que los acuerdos van configurando una trayectoria de enseñanza que acompañe los aprendizajes.

c) *Los chicos no vuelven al enunciado*

Varias maestras comentan que algunos alumnos, una vez que comienzan a abordar los problemas, se centran en la realización de los cálculos y *no vuelven al enunciado* planteado. Es decir, el texto que relata la situación que tienen que resolver no se convierte en una referencia, en una fuente de información para orientar, chequear, ajustar de manera permanente el camino de solución. El intercambio a raíz de estas cuestiones da lugar a conceptualizar en el espacio colaborativo los problemas aritméticos en términos de interacciones entre un enunciado y un conjunto de operaciones aritméticas que modelizan la situación.

"Tenemos que hacer algo para que vuelvan al enunciado", invita la directora. Se proponen entonces diferentes estrategias que apoyen –que impulsen– a las y los niños en la práctica de "volver al enunciado" para comprenderlo, como una referencia permanente en un "ida y vuelta" que se va jugando en la resolución, como un aspecto del propio quehacer matemático. La apropiación de esta práctica no se concibe así exclusivamente a cargo del chico sino acompañada, sostenida, alentada, puesta en juego por el docente. En el marco de esa conversación, se retoma[12] una idea, la de pedir a los alumnos que presenten por escrito la respuesta al problema como un modo de favorecer ese retorno al enunciado ("No perder a dónde íbamos").

¿Por qué los niños se comportan como si los enunciados fueran una excusa para hacer cuentas?, surge como un interrogante que vale la pena explicar. ¿Será que esa idea es la que, explícita o implícitamente, se transmite a través de la enseñanza? El sentido de la modelización como parte central del trabajo matemático queda oculto cuando eso sucede y, el análisis en el espacio colaborativo hace visible la necesidad de trabajar con los niños sobre este asunto. Es así como se retoman y valorizan una serie de estrategias que apuntarían a sostener la relación entre enunciado y cálculos: identificación explícita de datos e incógnitas, esquemas de representación de la situación, análisis colectivo del enunciado, análisis del significado de los resultados parciales, análisis colectivo de las respuestas, entre otras.

[12] El año precedente había sido ampliamente discutida esta estrategia que supone una resignificación de la antigua práctica de escribir la respuesta (Quaranta *et al.*, 2021).

d) *La resolución de problemas aritméticos como asunto didáctico*

Retomemos, a modo de síntesis, el desarrollo del apartado 5. Una serie de rasgos vinculados al trabajo con los problemas aritméticos se fueron delineando a partir de las discusiones que acabamos de relatar.

Conceptualizar, como resultado de los intercambios en el espacio colaborativo, la resolución de problemas en términos de interacciones entre el relato de una situación y su modelización aritmética ha permitido tanto hacer visible el carácter no lineal de las resoluciones que encaran las y los alumnos como resignificar el valor didáctico de considerar los procesos que ellos desarrollan al abordarlos. Efectivamente, esa idea de problema como interacción enunciado-matematización permite fundamentar el valor didáctico de reconstruir las diferentes marcas de los niños en sus procedimientos en términos de actividad intelectual que da cuenta de sus comprensiones. Se nutren así las decisiones del docente en la clase, al tiempo que se configura un registro a partir del cual proyectar colectivamente trayectorias de enseñanza sobre estos contenidos (Peltier, 2003).

La resolución de problemas que involucran varias operaciones aritméticas supone coordinaciones que no pueden reducirse a una yuxtaposición de los problemas más elementales que estarían incluidos en esa situación. Advertir esta complejidad conduce a concebir articulaciones entre problemas simples y complejos así como reflexiones sobre sus semejanzas y diferencias. La perspectiva del largo plazo para desarrollar una enseñanza en la que "retomar es también avanzar" se pone aquí de manifiesto. ¿Qué camino de enseñanza tenemos que trazar para que en algún momento logren resolver estos problemas?, fue una pregunta que marcó –una vez más– la necesidad de acordar cómo sería ese camino.

6. ESTADO DE ACUERDO Y TRAYECTORIAS DE ENSEÑANZA

Al recorrer las reuniones de este grupo colaborativo en sus cuatro años de funcionamiento, se reconoce –lo resaltamos a lo largo del artículo– la cuestión del progreso en los aprendizajes de los alumnos como el núcleo problemático a partir del cual se fueron organizando las discusiones. En ese contexto, y ya en el tercer año de trabajo, el grupo trae a la mesa el ejemplo de un chico, lo llamaremos V, que "no podía", que presentaba su hoja en blanco y "de repente" da cuenta de elaboraciones pertinentes que implican el establecimiento de relaciones complejas. ¿Qué pasó?, ¿hubo realmente un salto?, ¿cómo explicarlo? El caso sorprende e invita al análisis. Las maestras reconstruyen momentos, intervenciones y espacios en los que este alumno fue animándose, mostrando sus producciones, como si una red compuesta por ayudas, escuchas, interpretaciones, habilitaciones, explicaciones y claras muestras de confianza y afecto sostenidas a lo largo del tiempo "de repente" hubieran tenido la capacidad de modificar el vínculo del alumno, con el conocimiento. Esta reconstrucción colectiva de la trayectoria de V da cuenta de una experiencia del grupo que se transforma en referencia para pensar. En ese momento, el niño V comienza a ser alumno de todas. ¿Y los otros alumnos, también lo serán? La idea empieza a cobrar fuerza en el grupo. "Lo que les pasa a los chicos es el resultado de toda su trayectoria", dice una de las maestras. ¿Es realmente así?, ¿qué anclaje tiene esta afirmación en las prácticas de las aulas? La pregunta ubica el problema del progreso en un plano de responsabilidad colectiva y compromete simultáneamente tres dimensiones: los recorridos de enseñanza que orientan y organizan los procesos de los alumnos, las trayectorias de aprendizaje y los acuerdos institucionales que tejen la trama entre unos y otras.

Como hemos dicho en el marco teórico, Brousseau y Centeno (1991) advierten sobre una estructuración del sistema didáctico que no da lugar a la recuperación de los contextos en los que los alumnos han desarrollado su aprendizaje. Cuando los estudiantes pasan de un año a otro, el sistema de enseñanza no parece preparado para que la historia de conocimientos que han elaborado en sus clases –en interacción con su docente y sus compañeros– *pase de grado* con ellos. Son las referencias culturales, como dice Brousseau, las que se toman en cuenta para indicar los logros de los alumnos ("no llega a restar con dificultad, le cuesta escribir números con más de cuatro cifras, etc."). Si bien el legajo personal contiene algunas trazas, ha sido elaborado de manera individual por el docente y no necesariamente vincula los aprendizajes con las situaciones didácticas en las que tuvieron lugar. La idea de *acuerdos de enseñanza* en el marco de un espacio colaborativo puede ofrecer otra respuesta al modo de tomar en cuenta la historia de construcción de conocimiento de los alumnos como referencia para la enseñanza o, en otros términos, puede brindarnos elementos para pensar si es realmente posible considerar que las y los alumnos, como dicen las maestras de la Escuela 30, son de todas. ¿Por qué?

Los acuerdos, tal como los estamos concibiendo y como lo hemos explicitado ya, surgen de discusiones sostenidas respecto a los problemas de enseñanza que se van haciendo visibles a medida que transcurre el trabajo docente. Se trata de decidir colectivamente el curso a seguir en cada grado frente a algún tipo de incertidumbre, pregunta o expectativa que se hace visible a partir de las cuestiones que se ponen sobre la mesa. Son acuerdos realizados *desde adentro* de las prácticas. ¿Por qué pensamos que este modo de sostener las discusiones sobre la enseñanza permite construir una memoria de las condiciones de aprendizaje de los alumnos? No es que se repasa la historia de cada alumno o sus desempeños particulares en cada conversación sino que se mantienen vivas, disponibles para todos los integrantes del espacio colaborativo, las decisiones que se van tomando –el contexto en el que tienen cabida, las razones, las interpretaciones que se hacen sobre los desarrollos a partir de ellas–. Al tener un acceso continuo a la marcha de la enseñanza en cada grado, cada docente puede configurar una trayectoria de trabajo de la que forma parte junto con sus colegas. Esto amplía su comprensión de los recorridos de los alumnos, los inscribe en una historia que lo excede pero lo abarca y da sentido a la expresión de las maestras "los alumnos son de todas", en coincidencia con la que propone Terigi (2022) al referirse al carácter institucional de la enseñanza.

Investigadoras del campo pedagógico como Terigi (2010) y Briscioli (2017) introducen el concepto de trayectoria, escolar construido para abordar los recorridos de los sujetos por las instituciones escolares a través del tiempo y en interdependencia con las diferentes esferas de sus vidas. Como dice Briscioli (2017):

> Concebir el despliegue de las trayectorias escolares como entramado que vincula lo estructural, lo institucional y lo biográfico, mientras se focaliza en las condiciones de escolarización, permite evidenciar los efectos de estas condiciones en la construcción de las trayectorias escolares. (p. 27)

Desde esta mirada pensamos la trama de acuerdos didácticos tejida en los espacios colaborativos como trayectorias de enseñanza que acompañen los diversos recorridos de los alumnos desde una perspectiva institucional. En la medida en que se habilita un margen de maniobra para algunos de los condicionantes del dispositivo escolar, la idea de trayectoria de enseñanza tal como la hemos caracterizado aporta elementos para resignificar el papel activo de los sujetos en la vida institucional. Esta afirmación, de carácter conjetural, requiere seguir siendo estudiada.

7. CONCLUSIONES

El análisis de las discusiones en el espacio colaborativo de la Escuela 30 nos permitió arribar a tres ideas que concebimos estrechamente vinculadas: el grupo de docentes en *estado de acuerdo*, la construcción de una *memoria didáctica institucional* y la elaboración de *trayectorias de enseñanza.* Las discusiones sistemáticas y periódicas, el intercambio de miradas sobre los problemas que se van presentando, el análisis de las producciones de los alumnos y de las interacciones en las clases hace accesible para todas las integrantes del espacio colaborativo el trabajo que se desarrolla en cada grado. Al asumir colectivamente los interrogantes pedagógicos y didácticos que surgen de las prácticas, se construye una disposición a la toma de decisiones compartidas que configura un *estado de acuerdo.* Así, lejos de una concepción de la tarea docente como hecho individual, la enseñanza en cada grado se va tornando accesible para todo el colectivo. En ese movimiento, quedan en la memoria de todas las integrantes las principales trazas de la enseñanza en la escuela, que serán materia para la proyección de trayectorias que incluyan los acuerdos realizados.

¿Por qué preferimos hablar de *estado de acuerdo* y no, directamente, de *acuerdo*? Es un modo de enfatizar la disposición permanente a tomar decisiones en conjunto más que la suscripción de pactos definitivos. Encontramos una relación dialéctica entre *análisis de problemas de la práctica* que se hacen visibles en el espacio colaborativo y opciones para las aulas. Esta idea se diferencia de otros posibles acuerdos que las instituciones ya toman y que cumplen una función, como la necesaria distribución de los contenidos curriculares a lo largo de los grados. Estamos introduciendo una perspectiva distinta, pero compatible, la que se desprende del análisis de lo ya transitado y que hemos nombrado al comienzo de este artículo como acuerdos *desde adentro* de las prácticas.

Las relaciones entre la clase concebida como unidad y la singularidad de cada alumno, como también las concernientes entre el colectivo docente y las decisiones personales de cada maestra, atravesaron en varias oportunidades las consideraciones realizadas. Por una parte, es una preocupación permanente de los maestros tomar en cuenta a cada niño sin perder de vista el total de la clase ni dejar de pensar que es en el trabajo con los otros que los niños van construyendo aprendizajes fundamentales. A la vez, la integración de los docentes para constituir un modo de acción colectivo no desdibuja –no debería desdibujar– que cada maestro, cada maestra, tiene preferencias que se traducen en estilos particulares que legítimamente quisiera resguardar (Clot, 2000).

Hemos dado cuenta del valor productivo que tuvo en el espacio colaborativo la recuperación de escenas particulares referidas a progresos de algunos alumnos, sobre todo aquellos que *no podían y de repente pudieron*. El análisis pormenorizado de esas situaciones singulares hace posible relevar para las maestras trazas significativas de las historias puntuales, que se constituyen en casos de referencia, no porque se piense en su reproducción estricta sino porque permiten ampliar aquello que se concibe como posible al pensar las relaciones entre intervenciones docentes, supuestos que subyacen a ellas y transformaciones de los alumnos en sus vínculos con el conocimiento.

La organización graduada de la escuela ha sido suficientemente analizada y criticada (Baquero y Terigi, 1996). Si bien, la existencia de espacios colaborativos, como los que estudiamos en nuestro proyecto de investigación, no rompe con esta modalidad, sí permite atenuar, en parte, algunos de sus efectos obstaculizadores de los aprendizajes. Es así como, al incluir en los análisis la doble regulación ordenada tanto por los objetos de enseñanza como por las relaciones de las y los alumnos con el conocimiento, se hace posible construir fundamentos para revisar los límites establecidos *a priori* para cada grado. Asimismo, lo hemos señalado, el salto que exige para las y los alumnos el pasaje de un grado a otro se suaviza cuando las y los maestros acceden en el desarrollo del espacio colaborativo a las condiciones de aprendizaje de cada alumno y de su grupo de pertenencia. De todos modos, conocer hasta qué punto los acuerdos de enseñanza tejidos al calor del análisis de las prácticas logran flexibilizar los límites que impone la graduación es un asunto que requiere ser estudiado en profundidad y a mayor escala.

REFERENCIAS

Baquero, R. y Terigi, F. (1996). En búsqueda de una unidad de análisis del aprendizaje escolar. *Apuntes pedagógicos, 2*, 1-16.

Bednarz, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement.* L'Harmattan.

Bednarz, N. (Julio de 2004). Collaborative research and professional development of teachers in mathematics. *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*, 1-15.

Bednarz, N. y Proulx, J. (2010). Développement professionelle des enseignants en mathématiques. En L. Dionne (Ed.), *Education et formation. Travail en communautés, collaboration et partenairiats pour le développement professionnelle des enseignants* (pp. 21-36). e-293.

Briscioli, B. (2017). Aportes para la construcción conceptual de las "trayectorias escolares". *Revista Actualidades investigativas en educación. 17*(3), 1-30. https://doi.org/10.15517/aie.v17i3.30212

Brousseau, G. y Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2.3), 167-210.

Brousseau, G. (1994). La investigación en didáctica de la matemática. Conferencia en IMIPAE. Barcelona. Citado en Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática en Alagia, Bressan y Sadovsky, *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*. Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (Octubre de 1997). Questions vives, savoirs moribonds: le problème curriculaire aujourd'hui. *Actes du colloque Défendre et transformer l'école pour tous*, 3-5.

Chevallard, Y. y Johsua, M. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Clot, Y. (2000). La formation par l'analyse du travail : pour une troisième voie. En B. Maggi, *Manières de penser, manières d'agir en éducation et en formation* (pp 133-15). Presses Universitaires de France.

Clot, Y. (2008). Le travail entre activité et subjectivité. *La Découverte*.

Dardot, P. (2011). La subjectivation à l'épreuve de la partition individuel-collectif. *Revue du MAUSS*, 38, 235-258. doi.org/10.3917/rdm.038.0235

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. y Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64.

Dubet, F. (2007). *La experiencia sociológica*. Gedisa.

Dussel, I. (2006). Currículum y conocimiento en la escuela media argentina: Historia y perspectivas para una articulación más democrática. *Anales de la educación común, 2*(4), 95-105.

Dussel, I. (2006). De la primaria a la EGB: ¿qué cambió en la enseñanza elemental en los últimos años? En F. Terigi (Ed.), *Diez miradas sobre la escuela primaria* (pp. 85-130). Siglo XXI.

Lerner, D. (diciembre de 2007). ¿Tener éxito o comprender? Una tensión permanente en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. (Segunda Parte). *12(ntes). Enseñar Matemática. Nivel Inicial y Primario*, 43-62.

Lerner, D. (septiembre de 2007). ¿Tener éxito o coprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración. (Primera Parte). *12(ntes). ENseñar matemática. Nivel Inicial y Primario*, 61-80.

Passerron, J.-C. y Revel, J. (2005). Penser par cas. Raisonner à partir de singularités. En J. Passeron, y J. Revel (Ed.), *Penser par cas.* École de Hautes Étudess en Sciences Sociales.

Peltier, M. (2003). Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución. *Educación Matemática*, 15(3), 29-55.

Quaranta, M., Becerril, M., García, P., Pérez, M. y Sadovsky, P. (2021a). Exploración de estrategias de enseñanza orientadas a la inclusión de todos los alumnos en la clase de matemática. Resultados de un trabajo colaborativo entre docentes e inv. *Educación Matemática, 33*(2).

Quaranta, M., García, P., Becerril, M., y Itzcovich, H. (2021b). Acerca del conocimiento producido en el marco de un trabajo colaborativo entre docentes de escuela primaria e investigadores. En J. Castorina, y P. Sadovsky (Ed.), *Saberes y conocimientos en los procesos de enseñanza y aprendizaje* (pp. 141-164). Unipe: editorial universitaria.

Robert, A. y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 2*(4), 505-528.

Sadovksy, P., Quaranta, M., Itzcovich, H., Becerril, M. y García, P. (2015b). La noción de relaciones entre cálculos y la producción de explicaciones en la clase de matemática como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes. *Educación matemática, 27*(1), 7-36.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Becerril, M., Quaranta, M. y García, P. (2019). Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática: de la reflexión sobre las prácticas a la elaboración de ejes de análisis para la enseñanza. *Educación Matemática, 31*(2), 101-131.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M., Becerril, M. y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 28*(3), 9-30.

Sadovsky, P., Quaranta, M. E., García, P., Becerril, M. M., y Itzcovich, H. (2019). Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. Reflexiones metodológicas. *Revista digital Contextos de Educación,* (26), 41-49.

Sadovsky, P., Quaranta, M., Becerril, M., García, P., y Itzcovich, H. (2015a). Producción matemático-didáctica: una experiencia de planificación colaborativa entre maestros e investigadores. En A. Pereyra, y D. Fridman (Ed.), *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense* (pp. 221-250). UNIPE: editorial universitaria.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l´action conjointe en didactique.* De Boeck.

Terigi, F. (2010). Las cronologías de aprendizaje: un concepto para pensar las trayectorias escolares. Conferencia Santa Rosa, La Pampa, 23 de febrero de 2010.

Terigi, F. (2022). Los desafíos para la formación docente. En S. Alesso y M. Duhalde (Ed), *¿Qué docencia para estos tiempos? A 100 años del nacimiento de Paulo Freire.* Secretaría de Educación. Confederación de Trabajadores de la Educación de la República Argentina, CTERA.

Tomasello, M. y Sensevy, G. (2015). *Pourquoi nous coopérons.* Presses Universitaires de Rennes.

Trilla, J. (1985). *Ensayos sobre la escuela. El espacio social y material de la escuela.* Laertes.

Varcellino, S. (2020). *La performatividad del dispositivo escolar de la relación del-la alumno-a con el saber.* Doctoral dissertation, Córdoba.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Trillas.

Autor de correspondencia

María Mónica Becerril

Domicilio: Bolivia 4845. Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Argentina. (Código Postal 1419)
monicabece@gmail.com

Teléfono: 54 11 5605 6067

https://doi.org/10.24844/EM3502.07

Modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ en docentes que enseñan álgebra en los primeros años escolares

Modes of thinking the set $\mathbb{Z}_4$ in teachers who teach algebra in the first years of school

Pedro Vidal-Szabó,[1] Marcela Parraguez,[2]
Daniela Bonilla,[3] Samuel Campos[4]

Resumen: Para vincular la aritmética con el pensar práctico y teórico del álgebra, esta investigación exploratoria enmarcada en la Teoría Modos de Pensamiento realizó un estudio de caso, con el objetivo de caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes chilenos de primaria. Para ello, se analizaron las respuestas que dieron 30 docentes en servicio a un cuestionario en línea, con base en un modelo cognitivo propuesto que define los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ con sus articuladores. Los resultados muestran que estos docentes, en general, adhieren al modelo cognitivo y evidencian más articulación entre los modos sintético-geométrico y analítico-aritmético que entre los modos analítico-aritmético y analítico-estructural, lo que muestra un pensamiento teórico menos privilegiado. En conclusión, el álgebra de docentes de primaria puede activarse concibiendo al conjunto $\mathbb{Z}_4$ como un fragmento matemático que posee 4 elementos construidos. Cada uno es considerado un conjunto distinto de números congruentes módulo 4 que

Fecha de recepción: 5 de marzo de 2021. **Fecha de aceptación:** 23 de abril de 2023.

[1] Facultad de Educación, Universidad del Desarrollo, pfvidal@udd.cl, orcid.org/0000-0002-3320-9789.

[2] Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, marcela.parraguez@pucv.cl, orcid.org/0000-0002-6164-3056.

[3] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, daniela.bonilla@pucv.cl, orcid.org/0000-0003-0478-7827.

[4] Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, sjcampos@uc.cl, orcid.org/0000-0001-6657-7599.

particionan el conjunto $\mathbb{Z}$, haciendo que el concepto clase de equivalencia tribute a la construcción cognitiva del conjunto $\mathbb{Z}_4$ como grafo cíclico de orden 4.

Palabras claves: *Teoría Modos de Pensamiento, Modelo Cognitivo del conjunto $\mathbb{Z}_4$, Fragmento matemático, Docentes de primaria, Aritmética modular.*

Abstract: To link arithmetic with the practical and theoretical thinking of algebra, this exploratory research framed in the Modes of Thinking Theory conducted a case study to characterize modes of thinking about the set $\mathbb{Z}_4$ and its interactions in Chilean primary school teachers. For this purpose, the answers given by 30 in-service teachers to an online questionnaire were analyzed, based on a proposed cognitive model that defines the modes of thinking about the set $\mathbb{Z}_4$ with its articulators. The results show that these teachers, generally adhere to the cognitive model and evidence more articulation between synthetic-geometric and analytic-arithmetic modes than between analytic-arithmetic and analytic-structural modes, which shows less privileged theoretical thinking. In conclusion, the algebra of primary teachers can be activated by conceiving the set $\mathbb{Z}_4$ as a mathematical fragment with 4 elements constructed. Each one is considered a distinct set of congruent numbers modulo 4 that partition the set $\mathbb{Z}$, making the concept of equivalence class contribute to the cognitive construction of the set $\mathbb{Z}_4$ as a cyclic graph of order 4.

Keywords: *Modes of Thinking Theory, Cognitive Model of the set $\mathbb{Z}_4$, Mathematical fragment, Primary teachers, Modular arithmetic.*

1. INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico ha cobrado importancia en los currículos educativos, sobre todo, desde los inicios de la escolaridad obligatoria. En Chile, particularmente, el álgebra ha sido considerada como un eje temático que comienza en el grado 1 de primaria desde la reforma curricular del año 2012, estableciéndose que niñas y niños puedan explicar y describir relaciones entre números, formas, objetos y conceptos a través del análisis de patrones que "facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico" (Ministerio de Educación de Chile, 2012, p. 219).

Este tipo de pensamiento se concibe como una combinación entre (i) operar con incógnitas; (ii) pensar en términos de variables y sus relaciones; (iii) reconocer una estructura algebraica. Así, los sujetos que activan su pensar algebraico evidencian alguna manifestación referida a una combinación entre (i), (ii) y/o (iii), independiente si usan alguna notación algebraica usual (Carraher y Schliemann, 2014).

El álgebra temprana remite a un programa específico de investigación y provee de enfoques sobre la enseñanza para el álgebra escolar. Por ende, es considerada para la formación docente con el fin de permitir el fomento y desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años escolares. Además, contempla la aritmética elemental como un cimiento en el que se encuentran ideas y principios que son nociones y representaciones propias del álgebra. Ello requiere ser comprendido profundamente por docentes de manera avanzada para dar acceso inicial a sus estudiantes al álgebra. De hecho, son insuficientes los estudios que permiten cimentar las bases para el álgebra abstracta en la formación docente, a través de nociones elementales provenientes de la aritmética.

Es relevante hacer notar que el pensamiento algebraico ha sido definido de manera amplia, especialmente:

> El pensamiento algebraico en los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensar dentro de actividades para las que la letra simbólica podría usarse como una herramienta, o alternativamente dentro de actividades que podrían realizarse sin usar la letra simbólica en absoluto, por ejemplo, analizar relaciones entre cantidades, notar la estructura, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir. (Kieran, 2004, p. 149)

Vidal-Szabó y Núñez-Fernández (2021) indican que, para el aprendizaje del álgebra a una temprana edad, su enseñanza contemple tareas que incluyan patrones cualitativos y cuantitativos, en tanto, permiten descubrir o inventar formas de representar la realidad, mediante relaciones entre cantidades y el reconocimiento de estructuras en fenómenos modelables con álgebra. Entonces, es entendible que exista una visión funcional bastante extendida en la enseñanza de las expresiones matemáticas (Kieran *et al.*, 2016). Es así como:

> El enfoque funcional para el surgimiento del pensamiento algebraico... sugiere un estudio del álgebra que se centra en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones a través de encuentros con situaciones del mundo real, cuyas relaciones cuantitativas pueden ser descritas por estos modelos. (Heid, 1996, p. 239)

Tal como reportan Chrysostomou y Christou (2019), existe evidencia respecto de la generalización sobre una clase o distintas clases de números que niñas y niños son capaces de alcanzar. Por ejemplo, *un número impar más otro número impar da como resultado un número par*, y desde un conocimiento más avanzado puede interpretarse como el conjunto $\mathbb{Z}_2 =: \{\overline{0}, \overline{1}\}$, tal que la clase de equivalencia $\overline{0}$ representa a cada número entero que al dividirse en 2 poseen resto 0 (números pares) y, análogamente bajo la misma acción, la clase de equivalencia $\overline{1}$ representa a los que poseen resto 1 (números impares). En otras palabras, la concepción de número puede ampliarse y vincularse a la noción de clase de equivalencia al particionar $\mathbb{Z}$ en n-ésimas clases.

El álgebra temprana es un marco referencial, en el que esta investigación se circunscribe, en virtud del conjunto $\mathbb{Z}_4$ y la formación docente de primaria referida al pensamiento algebraico. En la sección siguiente, se presenta la base matemática sobre la cual se sustentan los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus articuladores como herramienta matemática que permite el pasaje entre los modos de pensar dicho conjunto.

1.1 La división en $\mathbb{Z}$

En los sistemas numéricos, las operaciones elementales son parte de las actividades que habitualmente comienzan en los primeros años de enseñanza. En particular, la operación división, a diferencia de las otras operaciones, posee 4 componentes numéricos: dividendo, divisor, cociente y resto.

La división puede ser presentada como la multiplicación del dividendo y el recíproco (inverso multiplicativo) del divisor, según Isoda y Olfos (2021). Por lo que dividir p y q (números enteros positivos) con resto 0, se transforma en la búsqueda de uno de los factores de la multiplicación, entendiendo así la división como una operación inversa a la multiplicación que usualmente es conocida como división exacta. Sobre su enseñanza, Ivars y Fernández (2016) afirman que, si las personas conocen el algoritmo de la división, entonces tienden a usarlo por sobre otras estrategias de resolución, lo que puede aumentar la aparición de errores o dificultades.

En el sistema numérico $\mathbb{Z}$, el concepto resto forma parte del proceso algorítmico de la división entre dos números enteros *dividendo* y *divisor* (no-nulo), cuyo valor puede variar desde 0 hasta el antecesor del valor absoluto del *divisor*, interpretándose de forma numérica, usualmente. Entonces, a pesar de que el resto puede tomar otros valores enteros positivos, hay insuficientes experiencias en formación docente que permiten ampliar el significado del resto a otras situaciones de enseñanza para primaria, lo cual denota que es posible avanzar a significados más abstractos para profundizar en la comprensión de estrategias que movilizan docentes en servicio, al resolver problemas que involucran al resto desde un pensar práctico y teórico, vinculado a conocimientos algebraicos. En consecuencia, el propósito de esta investigación es caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes chilenos de primaria en servicio.

1.2 Revisión matemática relacionada con el Conjunto $\mathbb{Z}_4$

Hasta el siglo XVIII, la noción de número, cardinal u ordinal, solo tenía sentido para conjuntos finitos. Más adelante, cobró sentido la introducción moderna de una escala de números infinitos. Los conjuntos de infinitos elementos son útiles para comprender los sistemas numéricos, por ejemplo, el sistema numérico $\mathbb{Z}$ con operaciones binarias definidas en este.

Respecto a la operación división, Lay-Yong (1966) hace un estudio comparado entre los métodos de resolución de una división entre dos números naturales, compara el método de galera, usado desde el siglo XV en Europa, el método hindú y el método chino que datan entre el siglo V y III a. e. c. Todos estos métodos explicitan la identificación de un resto en la división, aunque fue recién desde la segunda mitad del siglo XVIII que se comenzaron a publicar trabajos que estudiaban propiedades numéricas y algebraicas del concepto resto.

Uno de los primeros antecedentes formales de la Aritmética Modular fue el trabajo compilatorio y original de Gauss en el año 1801 en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*. Struik (1948/1980) declara que esta obra la fechan como un hito del comienzo de la teoría moderna de números, la cual aborda la teoría de las congruencias. La notación de Gauss para el módulo es $\boldsymbol{a \equiv b \; mod \; n}$ y tiene dos significados: (i) $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se encuentran en la misma clase de congruencia módulo $\boldsymbol{n}$, si ambos dejan el mismo resto al ser divididos por $\boldsymbol{n}$, o bien, (ii) $\boldsymbol{(a-b)}$ es múltiplo de $\boldsymbol{n}$. Hay que indicar que el significado (i) es el que domina en esta investigación, en virtud de los resultados obtenidos.

Esta investigación considera la relación de congruencia módulo 4 de la siguiente forma: $\forall\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2$: $a \equiv b \; mod \; 4$. Como propiedad, el conjunto cociente que genera dicha relación es: $\mathbb{Z}/ \equiv (mod\ 4) =: \{\overline{a}/\ a \in \mathbb{Z}\}$, tal que $\overline{a} = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x \equiv a \; mod \; 4\}$, lo que define cuatro clases de equivalencia, esto es, el conjunto $\mathbb{Z}_4$, a saber:

$$\overline{0} =: \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x \equiv 0 \; mod \; 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x = 4k,\, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$$
$$\overline{1} =: \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x \equiv 1 \; mod \; 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x = 4k + 1,\, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$$
$$\overline{2} =: \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x \equiv 2 \; mod \; 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x = 4k + 2,\, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$$
$$\overline{3} =: \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x \equiv 3 \; mod \; 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \;/\; x = 4k + 3,\, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$$

Notar que el representante de la clase de equivalencia puede estar dado por cualquier número que pertenezca a la misma relación de congruencia módulo 4. Por otra parte, la figura 1 define la operación $+$ en el conjunto $\mathbb{Z}_4$ por medio de la tabla de Cayley:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Figura 1. Tabla de Cayley para sumar en $\mathbb{Z}_4$.

Se destaca que $\overline{1}$ es generador del conjunto $\mathbb{Z}_4$ porque si se suma sucesivamente el $\overline{1}$ consigo mismo, se obtienen todos los elementos del conjunto $\mathbb{Z}_4$. Al generalizar, el elemento generador a al sumarse consigo mismo origina el conjunto $(a,\, 2a,\, 3a,\, 4a,\, 5a,\dots)$, tal que sus elementos son $2a = a + a$; $3a = a + a + a$; y así sucesivamente, como muestra la figura 2.

a	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$	$7a$	$8a$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Figura 2. Ilustración del ciclo de los números congruentes módulo 4 y generadores de $\mathbb{Z}_4$.

De la figura 2, notar que no todos los valores de a permiten obtener todos los elementos del conjunto $\mathbb{Z}_4$. Especialmente, si $a = \overline{1}$, o bien, $a = \overline{3}$, entonces se obtiene todo el conjunto $\mathbb{Z}_4$. También, las columnas, $5a, 6a, 7a$ y $8a$ vuelven a repetir las primeras cuatro columnas, formando un ciclo, el cual puede visualizarse por medio de un grafo que inicia desde un nodo ennegrecido que representa al $\overline{0}$ y, bajo una cierta orientación, se continúa pasando por cada nodo adyacente al anterior (ver figura 3).

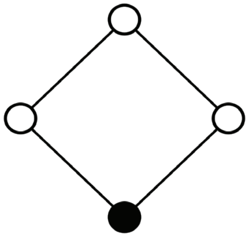


Figura 3. Grafo que representa un ciclo de orden 4.

Lo presentado se sustenta en la matemática y permite caracterizar tres modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, esto es, un grafo cíclico de orden 4, subconjuntos de $\mathbb{Z}$ derivados de la división por 4 y, dada la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$, las 4 clases de equivalencia. Estos aspectos matemáticos se exponen para explicitar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, lo que también permite vislumbrar articuladores que facilitan la interacción entre los modos de pensar dicho conjunto.

2. MARCO CONCEPTUAL

A continuación, se describe la definición de fragmento matemático, en el contexto de la Teoría Modos de Pensamiento, además con sus fundamentos para sustentar un modelo cognitivo que promueve comprender profundamente el conjunto $\mathbb{Z}_4$, y así contrastarlo con los resultados del instrumento aplicado en línea a docentes de primaria en servicio.

2.1 Definición de fragmento matemático

Hay un principio que se ha puesto en práctica para llegar a la teorización en matemáticas, esto es:

> La existencia de analogías entre los rasgos principales de diversas teorías implica la existencia de una teoría más general, de la cual esas teorías particulares no son sino ramales y que las unifica en lo que concierne a esos rasgos principales. (Fréchet (1955/1988, pp. 67-68)

Por ejemplo, en el cálculo vectorial se manifiesta, porque surge después de haberse desarrollado independientemente las teorías de las fuerzas, las velocidades de rotación, los torbellinos, entre otros fenómenos físicos. A saber:

> ... ciertas relaciones físicas de naturalezas diferentes para cada tipo de vectores llevaban a considerar como equivalentes dos sistemas de vectores de la misma naturaleza, cuyas representaciones geométricas tenían entre sí relaciones geométricas determinadas.
> En otros términos, equivalencias físicas diferentes se traducen en una misma equivalencia geométrica.
> Estudiar por consiguiente los vectores y la equivalencia geométrica de los sistemas de vectores, es constituir una teoría común a las magnitudes físicas vectoriales de naturalezas diversas. (Fréchet, 1955/1988, p. 68)

De este modo, un *fragmento matemático* (en adelante, *fm*) se concibe como una entidad invariante operativa o lógico-discursiva de una multiplicidad coherente de representaciones semióticas en registros distintos y reconocidas por la comunidad científica en el constructo matemático que le objetiviza. La naturaleza sistémica del *fm* puede desprenderse de Fréchet (1955/1988) que aborda la generalización como un proceso de práctica matemática:

> ... Todas las veces que el conjunto de propiedades de una entidad matemática, que son utilizadas para la demostración de una proposición concerniente a esa entidad, no caracteriza a la propia entidad, entonces la proposición puede ser extendida a una entidad más general. (p. 69)

Por su parte, el Álgebra Abstracta es una rama de la matemática que, vía definiciones y teoremas, estudia distintas estructuras algebraicas. Weisstein (2002) le define como la parte del álgebra que trata de temas como la lógica y sus fundamentos, el conteo, la teoría elemental de números, la teoría informal de conjuntos, el álgebra lineal y la teoría de operadores lineales.

Para efectos de esta investigación, el conjunto $\mathbb{Z}_4$ es un *fm* relacionado con el Álgebra Abstracta, pues se focaliza en distintas interpretaciones, mediante los modos de pensar este *fm* en un nivel matemático elemental, los cuales se describen en adelante.

2.2 Modos de Pensamiento teórico y práctico del fragmento matemático

La Teoría Modos de Pensamiento, en adelante TMP, ha sido desarrollada por más de dos décadas (Bonilla y Parraguez, 2013; Bonilla *et al.*, 2019; Campos y Parraguez, 2019; Sierspinska, 2000; Parraguez, 2012, 2018; Randolph y Parraguez, 2019), y se ha constituido como una teoría con enfoque cognitivo en la Didáctica de la Matemática que consiste en caracterizar modos de pensar algún *fm*, permitiendo estudiar fenómenos didácticos relacionados con su comprensión, vía la interacción que hace cognitivamente un sujeto entre los modos de pensar dicho *fm*. Lo anterior, desde la práctica investigativa, se puede evidenciar mediante la interpretación de argumentos que producen sujetos en la resolución de problemas matemáticos adecuados.

En la TMP, para alcanzar una comprensión sistémica de un *fm*, es primordial la articulación entre sus modos de pensar, en tanto, interactúan mediante articuladores que son herramientas matemáticas que permiten dicha interacción. De lo contrario, si no se considera dicha interacción, entonces se podría dar una comprensión sesgada del *fm*, generando un posible obstáculo didáctico, tal como lo reportó Sierpinska (2000) para el Álgebra Lineal y el conflicto entre su pensar teórico y práctico.

En la TMP se identifica el modo *Sintético-Geométrico* (SG) con el pensar práctico y los modos *Analítico-Aritmético* (AA) y *Analítico-Estructural* (AE) con el pensar teórico. Actualmente, se ha utilizado la TMP para interpretar la comprensión de algunos Sistemas Numéricos. Panorámicamente, Parraguez *et al.* (2020) reportan una indagación en los sistemas numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{C}$ desde los modos de pensamiento, cuyos resultados muestran que estudiantes y docentes de matemática, en formación, privilegian el modo AA en el abordaje de las actividades presentadas, siendo que estaban intencionadas para provocar el tránsito entre sus modos de pensar. Otro estudio reportó sobre cómo estudiantes de educación escolar y universitaria interpretan $\mathbb{C}$ y cómo es posible alcanzar su comprensión profunda, evidenciando ciertos articuladores que permiten el pasaje entre los modos de pensar $\mathbb{C}$ (Randolph y Parraguez, 2019).

Los modos de pensar un *fm* desarrollados y adheridos a los que definió Sierpinska (2000), se describen como:

- *Modo SG* del *fm* se presenta mediante una representación que evoca lo primero que se viene a la mente a través de una figura, un conjunto de puntos u otro similar de manera sintética geométrica.
- *Modo AA* del *fm* se muestra a través de relaciones numéricas o simbólicas u otras similares de manera analítica aritmética.
- *Modo AE* del *fm* se evidencia mediante axiomas, propiedades o teoremas de los objetos matemáticos que se le caracterizan como invariantes, más allá de la forma (prescindiendo de lo práctico) de manera analítica estructural.

Con base en la matemática, dichos *modos* y sus *articuladores* constituyen un Modelo Cognitivo del *fm* que da cuenta de la comprensión profunda en enseñantes y/o aprendices, en tanto, estos sujetos proporcionan evidencias de las interacciones en el modelo, conciliando lo práctico con lo teórico propios del *fm* (Parraguez *et al.*, 2021).

2.3 Modelo cognitivo propuesto para comprender profundamente el conjunto $\mathbb{Z}_4$

El modelo cognitivo para pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, por medio de sus modos SG, AA y AE, y sus articuladores se muestra a continuación en las Tablas 1 y 2, respectivamente.

Tabla 1. Modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

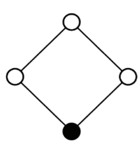
Modos de pensar	SG	AA	AE
Idea matemática	Grafo cíclico de orden 4	4 subconjuntos de $\mathbb{Z}$, cuya unión disjunta es $\mathbb{Z}$, dada la división por 4 y los restos generados	4 clases de equivalencia, dada la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$
Representación		$A = \{..., -8, -4, 0, 4, 8,...\}$ $B = \{..., -7, -3, 1, 5, 9,...\}$ $C = \{..., -6, -2, 2, 6, 10,...\}$ $D = \{..., -5, -1, 3, 7, 11,...\}$ en que $\mathbb{Z} = A \cup B \cup C \cup D$ con $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$	$\overline{0} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 0\ mod\ 4\}$ $\overline{1} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 1\ mod\ 4\}$ $\overline{2} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 2\ mod\ 4\}$ $\overline{3} =: \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \equiv 3\ mod\ 4\}$ tal que $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$

Tabla 2. Articuladores hipotéticos entre los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

Tránsitos	Articuladores	Descripción
SG ↔ AA	Correspondencia biunívoca	Para cada nodo del grafo cíclico de orden 4, le corresponde un único subconjunto de $\mathbb{Z}$, esto es, $\mathbb{Z} = A \cup B \cup C \cup D$ con $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$, biunívocamente.
AA ↔ AE	Relación de congruencia módulo 4	Al dividir un número entero (dividendo) por el divisor fijo 4, se generan cuatro restos (0, 1, 2 y 3) que representan a los dividendos congruentes módulo 4 como clases de equivalencia.
SG ↔ AE	Correspondencia biunívoca	Para cada nodo del grafo cíclico de orden 4, le corresponde una única clase de equivalencia con base en $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$, biunívocamente.

Con base en la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv (mod\ 4)$ se particiona $\mathbb{Z}$ y se generan 4 subconjuntos disjuntos, cuyos representantes son números distintos que no se interpretan como cantidades sino como clases de equivalencia.

Abordar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ desde sus modos SG, AA y AE pone de relieve un pensamiento sistémico que permite evidenciar su comprensión profunda. Una de las características de este tipo de pensamiento es el establecimiento e interacción de diferentes maneras de visualizar y entender un *fm*, involucrando vínculos entre estas interacciones dentro de un sistema, los que están conectados a otros *fm*. Por ejemplo, grupo cíclico, grupo cociente, aritmética modular, clases de equivalencia, división euclidiana, entre otros, están vinculados sistémicamente al conjunto $\mathbb{Z}_4$ en el contexto del álgebra abstracta. Por tanto, la comprensión profunda del conjunto $\mathbb{Z}_4$ se produce por la interacción de los modos de pensar SG, AA y AE, con lo cual el pasaje de un modo de pensar a otro, a través de articuladores, se torna fundamental para esta investigación. A su vez, es requerido explicitar qué herramientas matemáticas son dichos articuladores.

Esta investigación busca caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes de primaria en servicio. Para ello, en el marco de la TMP, la pregunta de investigación es ¿qué articuladores propician la comprensión profunda del conjunto $\mathbb{Z}_4$? A partir de los resultados obtenidos, producto del análisis de los datos cualitativos recolectados, la determinación de articuladores permite validar, refinar o refutar el modelo cognitivo propuesto (ver tablas 1 y 2).

3. METODOLOGÍA

Esta investigación exploratoria es cualitativa y se enmarca en un estudio de caso instrumental, ya que el caso se escoge para caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes de primaria en servicio, lo que permite conseguir un entendimiento más profundo del fenómeno didáctico en cuestión, pues se centra en lo específico y no en lo general. En otras palabras, es un estudio de lo singular, lo particular y lo exclusivo referido a un caso sobre un sistema integrado (Stake, 1998).

En este tipo de investigaciones se permite profundizar en temas poco explorados para alcanzar una indagación más detallada. Según Merriam (1988), los estudios de caso son descriptivos e interpretativos y, se apoyan en el razonamiento heurístico durante el tratamiento de diferentes fuentes de datos por parte del equipo investigador. Dentro de sus virtudes, un estudio de caso tiene el potencial de implicar a sus participantes en el proceso, reconociendo la necesidad de una construcción conjunta de la realidad percibida, vía relaciones e interpretaciones que se crean, lo cual además otorga oportunidades para que los investigadores afiancen una autorreflexión para comprender el caso (Simons, 2011). En la presente investigación se valora las perspectivas de los docentes como participantes, en cuanto al entendimiento que evidencian frente a una realidad que se supone subjetiva y que se reactiva con un problema matemático visto con anterioridad adaptado a un cuestionario en línea.

3.1 El caso: participantes y contexto

Participaron de esta investigación 30 docentes de primaria en servicio, solo 13 poseen alguna especialidad en matemática y para identificarlos se les rotuló desde P01 a P30, bajo consentimiento informado que garantiza anonimato y circulación reservada de los resultados del cuestionario aplicado en línea. Dichos docentes han sido parte de un programa chileno de desarrollo profesional llamado *Sumo Primero en Terreno* (SPT, versión año 2019-2021) que abarcó 200 escuelas con altos desafíos educativos.

En el cuestionario en línea, opcionalmente, los docentes podían subir archivos de sus resoluciones a Google Forms. Entre los participantes que subieron sus producciones, existe un desempeño que se denominó emblemático (docente P13) porque en sus respuestas escritas fotografiadas se vislumbra la coherencia con el modelo cognitivo propuesto para pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

3.2 Instrumento de recogida de datos

En el programa SPT, dos investigadores del equipo diseñaron e implementaron un taller que puso en juego un problema matemático, que resolvieron los docentes para dotar al concepto resto de un significado. Este problema se convirtió en un pilotaje masivo y en una fuente de inspiración para el diseño del instrumento que se describe en la figura 4.

EL JUEGO DE LAS ESTACIONES DE COLORES

Consiste en predecir el color de la estación donde se encuentra Pablo al realizar saltos de una estación a otra, comenzando siempre en la estación roja (ver Figura A).

I- Predice la estación donde está Pablo a los:

a) 16 saltos (**Ítem A**); b) 34 saltos (**Ítem B**); c) 373 saltos (**Ítem C**)

Para cada caso, explica cómo lo pensaste.

II- ¿En qué estación cae finalmente Pablo a los $4n+2$ saltos, siendo $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$? (**Ítem D**)

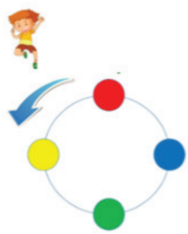


Figura A. El juego de las estaciones de colores

III- Partiendo siempre desde la estación roja, ¿Cómo expresaría los saltos de Pablo, si cada vez que juega cae finalmente en la estación azul? (**Ítem E**)

Figura 4. Problema matemático denominado *El Juego de las Estaciones de Colores*.

Este problema se adaptó para ser implementado en ítems del A al E, mediante un cuestionario en línea soportado en Google Forms, el cual contempló cinco secciones: (1) descripción del propósito del cuestionario y consentimiento informado; (2) perfil de los participantes; (3) Ítems A, B y C; (4) Ítems D y E y (5) sección final para reflexionar sobre lo realizado y contacto. Opcionalmente los participantes podían subir un archivo de su resolución por escrito (en formato doc, pdf, jpg o ppt) en la sección (3) y (4).

3.3 Categorías de análisis y descriptores

La tabla 3 presentan categorías de análisis que son los tránsitos producidos entre un modo y otro de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ mediante articuladores definidos (ver tabla 2). Así, es posible levantar evidencias para validar, refinar o refutar el modelo cognitivo propuesto para pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

Tabla 3. Descriptores de tránsitos generados por articuladores hipotéticos entre modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, según ítems.

Tránsitos	Articulador hipotético	Descriptor	Ítem
SG → AA	Conteo 1 a 1, haciendo corresponder el número de saltos con las estaciones de colores.	Cuenta uno por uno las estaciones de colores, cíclicamente, hasta llegar al salto 16, el cual hace corresponder a la estación roja.	A
SG → AA	El número de saltos que es múltiplo de 4 es asociado a la estación roja.	Para cada múltiplo de 4, le corresponde únicamente la estación roja.	A
SG → AA	Agrupa de 4 en 4 y cuenta lo restante.	Agrupa de a 4, y relaciona lo restante a una única estación de color. En este caso, 8 grupos de 4 saltos y 2 saltos más, lo cual asocia a la estación verde.	B
AA → AE	Algoritmo de la división.	Realiza la división entre 373 (dividendo dado) y 4 (divisor fijo), cuyo resto es 1 y lo relaciona con la estación amarilla.	C
AA ↔ AE	Noción de función.	Identifica como $\{4n+1\}$ a todos los saltos que se relacionan a la clase de equivalencia $\overline{1}$ (estación amarilla), expresando $373 = 4 \times 83 + 1$.	C
SG ↔ AE	Noción de función.	Reconoce que el número de saltos $\{4n+2\}$ se relacionan a la estación verde, dando valores para la variable n y generalizando hacia la clase de equivalencia $\overline{2}$, ya que son números congruentes módulo 4.	D
SG ↔ AA	Noción de función.	Reconoce que la estación azul está asociado al número de saltos $\{4n+3\}$ o $\{4n-1\}$, pues son números congruentes módulo 4.	E

Nota. La notación "p→q" da cuenta de un tránsito unidireccional desde "p" hacia "q". Mientras que el uso de "p↔q" da cuenta de una bidirección, tanto de "p" hacia "q" como viceversa, siendo p y q distintos modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$.

3.4 Procedimiento de análisis y validación

Con base en la tabla 3, se distribuyó el trabajo de análisis, dos investigadores analizaron las respuestas a los ítems A, B y C; y otros dos analizaron las respuestas a los ítems D y E. Luego, se examinaron los análisis de forma conjunta y se concordaron diferencias.

El método de validación de datos, fue mediante el análisis conjunto de las interpretaciones a través de la TMP de los investigadores en dos equipos, lo cual fue útil para la valoración de aspectos cualitativos. Dicha técnica fue adecuada metodológicamente porque permitió una validez de contenido, mediante juicio experto (Escobar-Pérez, 2008).

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Del análisis de los datos desde el ítem A al C, se destaca que, a medida que aumenta el número de saltos, la dificultad aumenta porque disminuyeron las respuestas correctas. Igualmente, en las respuestas a los ítems D y E se da cuenta de un nivel de dificultad progresivo, en tanto, una respuesta correcta debía otorgar una interpretación simbólica a los $4n + 2$ saltos, dado $n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,...\}$ (ítem D) y expresar simbólicamente los saltos, si cada vez que se juega resulta que cae en la estación azul, partiendo siempre desde la estación roja (ítem E). En síntesis, la figura 5 muestra la distribución de respuestas correctas, según ítem.

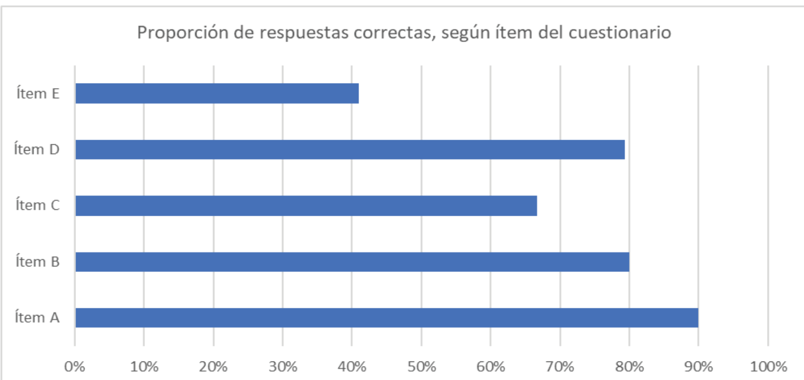


Figura 5. Gráfico de la distribución de respuestas correctas por ítem.

4.1 Análisis de las respuestas a los ítems A, B y C

El ítem A tuvo un bajo porcentaje de error, solo 3 docentes erraron de 30. En este ítem se privilegia los argumentos de contar 1 a 1 por estación de color y obtener que: *al salto 16, Pablo cae en la estación roja* (11 docentes, 37% de los participantes). Mientras que la segunda mayoría se centra en una estrategia multiplicativa, pues identifican que: *a los 16 saltos, agrupando de 4 en 4, corresponde a la estación roja de donde se partió* (9 docentes, 30% de los participantes).

Algunos argumentos evidencian un tránsito entre el modo de pensar SG al AA en el ítem A. Por ejemplo:

> P24: Conté de 1 en 1 hasta llegar a 16. Luego identifiqué que el rojo son todos los múltiplos de 4, por lo tanto, al salto 16 caería en el rojo.
>
> P16: Hice hasta el salto 4 que es cuando vuelve a la roja. Entonces me di cuenta de que cada 4 vuelve a la roja por lo que en el número 16 y cualquier múltiplo de 4 cae en la roja.

El argumento de P24 distingue que el contar 1 a 1 va por estación dando cuenta de un modo SG, el cual extiende al modo AA, identificando que el número de saltos que son múltiplos de 4 volverán a la estación roja. Mientras que P16 privilegia el modo AA, en tanto cambia el modo SG al AA porque al salto 4 identifica que cada 4 se vuelve a la estación roja, manifestando un razonamiento numérico más afianzado que P24.

Por su parte, P13 evidencia un modo de pensar AA, estrictamente, ya que evita contar estación por estación como se muestra a continuación:

> P13: La ronda, al tener 4 estaciones, puedo calcular el color a los 16 saltos de manera mental al amplificar por cuatro. De esta manera me evito de contar unívocamente.

En el ítem B se duplicó el porcentaje de error en relación con el ítem A, al responder incorrectamente 6 docentes de 30. Asimismo, deja de estar privilegiado el conteo 1 a 1, ya que el número de saltos es mayor que el ítem A (de 16 a 34 saltos), lo cual pudo producir que predominaran estrategias multiplicativas (17 docentes, 56% de los participantes). Hay argumentos en el ítem B que se aproximan a la estación por defecto, esto es, buscar un múltiplo de 4 menor y cercano a 34 para después sumar los saltos que faltan y así relacionarlos con la estación correspondiente. Por ejemplo, P15 privilegia el modo AA, aunque no abandona el pensar práctico:

P15: 32 es múltiplo de 4, por lo tanto, cae en la roja... saltamos dos veces para llegar al salto 34...cae en el verde.

Otros participantes, en cambio, entablan una relación aproximándose también por defecto, pero considerando los múltiplos de 16, por ejemplo:

P27: El doble de 16 son 32 más 2.
P21: Dupliqué la cantidad de la pregunta anterior y me moví las dos restantes.

Hay un argumento correcto que se aproxima a la estación por exceso, esto es, buscar un múltiplo de 4 mayor y cercano a 34, para luego restar los saltos que sobran y relacionarlos con la estación respectiva. Por ejemplo, P07 privilegia el modo AA en tanto expresa en su argumento numérico la siguiente operación combinada: "4 × 9 - 2".

Existe otro argumento que se acerca al modo AE desde el modo AA, al considerarse la secuencia *4, 8, ..., 32* (primeros múltiplos de 4, o bien, números que al dividir por 4 da resto 0) asociados a la estación roja y, desde ahí, llega al salto 34 sumando 2 para llegar a la estación verde, según explica P13 a continuación:

P13: De igual manera fui amplificando por 4, hasta acercarme al resultado. Me posicioné en el rojo a los 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32 y nada más salté los 2 espacios que faltaban para completar los 34.

El ítem C tuvo un porcentaje de error mayor que en el ítem B, no acertando correctamente 10 docentes de 30. Persiste la estrategia de aproximarse, a través de los múltiplos de 4 por defecto, lo cual da cuenta de un modo AA de pensar el problema que no excluye del todo al modo , por los indicios en el registro verbal que se dan con las expresiones: "un salto", "avanzando", "amarillo", entre otros, propios del contexto del juego. Por ejemplo:

P24: Consideré que estaría en el color rojo en el salto 372 (93 x 4) y más 1 salto quedaría en el color amarillo.
P28: Busqué el múltiplo de 4 y agregué 1.
P13: Amplificando el 4 hasta aproximarse al 372; avanzando 1 espacio quedando en el amarillo. También se puede hacer por medio de la división.

Otros argumentos, como respuestas al ítem C, ocupan el resto 1 de la división entre el número de saltos 373 y el número fijo de estaciones 4, relacionándolo a que cae en la estación amarilla (10 de 30 participantes). Esto evidencia privilegiadamente el modo AA, pues cada resto se relaciona con un único color de estación (idea emergente de clase de equivalencia, bajo el modo AE), estando el modo SG presente mediante términos como "un salto más", "de la roja pasamos a la amarilla", "el resto lo moví", entre otras expresiones. Por ejemplo:

> P15: 373:4=93... 93x4=372 cae en la roja... el resto es 1, por lo tanto, debemos hacer un salto más para llegar al 373...de la roja pasamos a la amarilla.
>
> P21: Realicé una división utilizando como divisor las 4 estaciones y solo el resto lo moví.
>
> P11: Dividí 373 en 4, me sobra 1.

A partir de estos resultados, es posible reconocer un razonamiento figurativo con iteración al desplegar el modo SG mediante el uso de términos como *saltos*, *avanzar*, *estaciones*, *ronda*, entre otros; haciendo de la estrategia de conteo 1 a 1 una correspondencia biunívoca entre un único color de estación con los números de saltos respectivos.

Además, la idea de iteración se vincula, en la mayoría de los casos, a un razonamiento numérico que es cíclico, en el sentido que se toma en cuenta una aproximación por defecto, esto es, $4k + p$ con k entero positivo y p varía discretamente de 0 a 3, en que $p = 0$ corresponde a la estación roja, $p = 1$ a la amarilla, $p = 2$ a la verde y $p = 3$ a la azul. O bien, una aproximación por exceso, esto es, $4k - q$ con k entero positivo y q varía discretamente de 0 a 3, en que $q = 0$ corresponde a la estación roja, $q = 1$ a la azul, $q = 2$ a la verde y $q = 3$ a la amarilla. Tanto $4k + p$ como $4k - q$ son articuladores que van desde el modo SG al modo AA, y viceversa.

Igualmente, hay casos que dan uso del concepto resto al dividir la cantidad de saltos con la cantidad fija de 4 estaciones, lo cual hace que cada resto varíe discretamente de 0 a 3 y se relacione con un único color de estación. Lo anterior, evidencia los modos SG, AA y, en parte, que emerja el modo de pensar AE del conjunto $\mathbb{Z}_4$.

4.2 Análisis de las respuestas a los ítems D y E

Esta sección precisa de una coordinación implícita, pues ambos ítems D y E pretenden que los docentes etiqueten cada estación en términos n-*ésimos*. Sin embargo, el alcance de logro en ambos ítems es desigual como se aprecia en la figura 5, siendo el ítem E el más exigente.

Las respuestas al ítem D alcanzaron un bajo porcentaje de error (5 participantes de 29 que respondieron, dado que P24 no responde). De ello, los docentes P04, P08 y P12 respondieron que la estación en que cae Pablo después de $4n + 2$ saltos es la estación azul, P09 dice que cae en la estación amarilla, mientras que P21 y P29 en la estación roja. Esto se puede interpretar, en el sentido de la TMP, que los docentes no han desarrollado la articulación entre los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, vía el concepto función.

Entre los argumentos correctos más recurrentes dados por los docentes al ítem D, se encuentra P01 que proporciona el siguiente argumento:

> P01: Porque cualquier múltiplo de 4 dejará a Pablo en el casillero rojo entonces más 2 lo lleva siempre al casillero verde, es una constante.

El argumento de P01 muestra una generalización porque dice "... cualquier múltiplo de 4...", al hacer de los múltiplos de 4 un punto fijo para moverse a otras estaciones. Esto evidencia que articula los modos SG con AE, mediante la correspondencia entre cada estación de acuerdo con una única clase de equivalencia (elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$).

Por su parte, menos de la mitad de las respuestas al ítem E fueron correctas. Su resolución requería construir un elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ por medio de una partición, asociada a un solo color de estación. Entre los argumentos que mostraron los docentes para indicar una expresión simbólica que representa los juegos de Pablo que caen en la estación azul partiendo de la roja, se pueden clasificar en dos tipos de argumentos, a saber:

Argumento tipo 1. Hay 9 docentes que expresan la situación del ítem E con la expresión $4n + 3$. Ello evidencia que hacen corresponder la estación azul (modo SG), con su representación generalizada, correspondiente a la expresión $4n + 3$, siendo el resto igual a 3 y convirtiéndose en un elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ (modo AE). Entre los argumentos que han empleado los docentes para su accionar simbólico, se encuentra el argumento de P02, a continuación:

> P02: Sería (4n+3) porque independiente de las vueltas completas que dé, siempre debe darle (3 en el resto) para que quede en el círculo azul, porque debe dar 3 saltos más a partir del círculo rojo.

Notar que P02 da cuenta que $4n$ es un invariante en tanto enuncia que "... independiente de las vueltas completas que dé...", haciendo de la estación roja un punto fijo para contar los saltos restantes luego de las vueltas completas, señalando que "... debe dar 3 saltos más a partir del círculo rojo".

Argumento tipo 2. Hay 5 docentes que expresan la situación del ítem E con la expresión $4n-1$. Análogo al argumento tipo 1, esto evidencia que hacen corresponder la estación azul (modo SG), con su representación generalizada correspondiente $4n-1$, tal que se busca un múltiplo de 4 por exceso para luego restar 1 salto y obtener así que dicho número generalizado de saltos corresponde a una clase de equivalencia como elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ (modo AE). Por ejemplo:

> P27: Cae en la casilla anterior a la que partió.
> P21: 4 × n - 1, siendo n = {0, 1, 2, 3, 4, ...}.

Notar que P27 da cuenta de la acción de saltar en la orientación contraria al indicado en el problema (ver figura 4), ya que retrocede un salto desde la estación roja de partida.

En consecuencia, el argumento tipo 1 permite entablar una relación entre cada elemento del conjunto $\mathbb{Z}_4$ con un único resto, mientras que el argumento tipo 2 fija la expresión $4n-1$ como una función, cuyo dominio es el conjunto N_0.

4.3 Desempeño emblemático de P13

A continuación, la figura 6 presenta un diagrama que muestra los argumentos escritos de P13 interpretados desde el modelo cognitivo propuesto.

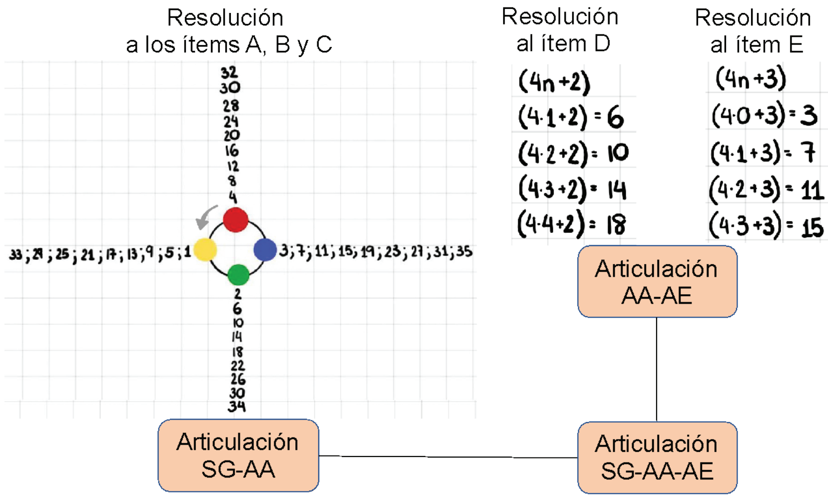


Figura 6. Interpretación de las respuestas de P13 de acuerdo con el modelo cognitivo propuesto.

El docente P13 brinda una articulación completa entre los tres modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$, en el sentido que su producción muestra que para los ítems A, B y C existe un articulador entre los modos SG y AA, pues a cada color de estación le hace corresponder una única secuencia de saltos, biunívocamente. Asimismo, en la resolución a los ítems D y E, P13 evalúa las funciones $4n + 2$ y $4n + 3$, respectivamente, las que cumplen con el rol de articulador entre los modos AA y AE. De hecho, para el ítem D argumenta que: *Al desarrollar la expresión reemplazando los valores de "n"; determiné cual era el salto que Pablo se encontraba.* Notar que consideró como preimagen los valores 1, 2, 3 y 4; mientras que en el ítem E consideró los valores de preimagen 0, 1, 2 y 3. De lo anterior, se concluye que en el ítem E, P13 da uso del 0: "*(4 × n + 3)* saltos, donde *n = {0; 1; 2; 3; 4; 5; ...}*", pero cabe destacar que es difícil interpretar el salto número 0 producto del trilema compuesto por la cantidad (*0 saltos*), la posición (*salto 0*) y el elemento del dominio o del codominio de cierta función f –esto es, 0 como preimagen de f, o bien, 0 como imagen de f, respectivamente.

Desde la perspectiva funcional, la consideración del 0 será relevante en el dominio de cierta función f, dependiendo de la expresión algebraica para su imagen. En otras palabras, si el dominio parte de 0 (conjunto $\mathbb{N}_0$) como preimagen tiene sentido la expresión $4n + 3$ para sus imágenes en el ítem E, pero si el dominio parte con el valor de preimagen 1 (conjunto $\mathbb{N}$) debe ser considerada la expresión $4n-1$ para sus imágenes, y así obtener el elemento $\overline{3}$ del conjunto $\mathbb{Z}_4$, ya que los conjuntos de dichas imágenes en ambos casos son números congruentes a 3 módulo 4, siendo una misma partición de $\mathbb{Z}$. Lo anterior, hace que cobre relevancia el modo AE del conjunto $\mathbb{Z}_4$, prescindiendo de la forma al centrarse en la clase de equivalencia que genera dicha partición en $\mathbb{Z}$ como una estructura más integral y sistémica.

5. DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

El propósito de esta investigación fue caracterizar modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ y sus interacciones en docentes chilenos de primaria en servicio. Según el análisis y los resultados se evidenció que los modos de pensar el conjunto $\mathbb{Z}_4$ pueden ser caracterizados como un camino cíclico de orden 4 con una orientación determinada en el avance (pensamiento práctico) y como números congruentes módulo 4, inclusive, por la propiedad $\mathbb{Z}/\equiv(mod\ 4)$ como una tetrapartición del conjunto $\mathbb{Z}$ (pensamiento teórico).

Con el fin de que el pensar práctico y teórico robustezcan la comprensión profunda del conjunto $\mathbb{Z}_4$ es necesario caracterizar los articuladores entre los modos SG, AA y AE del conjunto $\mathbb{Z}_4$. Es así como la tabla 3, a la luz de los resultados, confirma que la propuesta de articuladores hipotéticos es plausible y viable. Otros estudios en esta línea podrían seguir refinando el modelo cognitivo propuesto, por ejemplo, de acuerdo con los sujetos resolutores del problema de la figura 4 dirigido a escolares, profesores en formación, incluso, al formador de profesores.

Las actividades tradicionales que se asocian al desarrollo temprano del pensamiento algebraico son el analizar relaciones entre cantidades, captar alguna estructura, estudiar el cambio, generalizar resolviendo problemas, modelando, justificando, probando y prediciendo (Kieran, 2004). Estas acciones se condicen a las sugeridas por Vidal-Szabó y Núñez-Fernández (2021) y coinciden con las realizadas por los docentes que participaron de esta investigación, en virtud del cuestionario en línea aplicado. Asimismo, tomando en cuenta a Carraher y Schliemann (2014), fue posible interpretar que el pensar algebraico de los docentes involucra una combinación entre operar con incógnitas y en términos de variables y sus relaciones, como también reconocer cierta estructura algebraica implícita, independiente de la usual notación algebraica.

Por su parte, se corrobora lo reportado por Ivars y Fernández (2016), pues algunos docentes por privilegiar el algoritmo de la división, sobre otras estrategias más adecuadas, favorecieron la aparición de errores. Además, de acuerdo con Chrysostomou y Christou (2019), esta investigación da cuenta que es posible extender el tratamiento que se da al conjunto $\mathbb{Z}_2$ en estudiantes al conjunto $\mathbb{Z}_4$ en docentes de primaria en servicio, y no solo desde una proximidad numérica, sino también desde una proximidad figural y estructural, generando una comprensión algebraica más profunda.

Se concluye que los docentes participantes, en general, adhieren al modelo cognitivo definido y evidencian más articulación entre los modos SG-AA que entre los modos AA-AE, lo que puede estar indicando un pensamiento teórico menos privilegiado. Además, el álgebra de los docentes de primaria en servicio puede activarse concibiendo al conjunto $\mathbb{Z}_4$ como un *fm* que posee 4 elementos que corresponden a números distintos y congruentes módulo 4 que particionan $\mathbb{Z}$ en un pensar teórico, haciendo que la concepción de número se modifique por la relación con el concepto clase de equivalencia que tributa a la construcción del conjunto $\mathbb{Z}_4$ como grafo cíclico de orden 4.

La idea del 0, o bien, análogamente la idea del 1, ambos como primer elemento a tomar en cuenta durante el proceso de abstracción del modo SG hacia el modo AA y/o AE ha resultado una limitación de la investigación en relación con el contexto del problema matemático, pues su fenomenología restringe el número de saltos en tanto comienza de 1 en vez de 0, pues el salto nulo (0 saltos como cantidad) no tiene significado en dicho contexto, pues sería un salto que no se hace; a menos que se signifique el salto 0 de forma ordinal. A pesar de ello, excepcionalmente, P13 pudo dar uso al número 0 como primer elemento cuando resuelve el ítem E, a diferencia de cómo resolvió ítem D, lo cual da indicios de una progresión en su comprensión profunda referida al conjunto $\mathbb{Z}_4$.

Otra limitación es la orientación en el sentido antihorario de los saltos que se realizan en el juego de las estaciones de colores, pues restringe pensar en los números enteros negativos, para lo cual puede ampliarse a una orientación en el sentido horario para dar significado a la negatividad de los números enteros. Sin embargo, hubo docentes que generalizaron los saltos con la expresión $4n-1$ en el ítem E (argumento tipo 2), la cual relacionan a la estación azul y que significaban para $n=0$ el salto (-1) como uno en sentido horario desde la estación roja, esto es, retroceden un salto desde la estación roja. Ello puede transformarse en una oportunidad de aprendizaje para entender los elementos inversos del conjunto $\mathbb{Z}_4$ dotado de la operación adición.

Dentro de las implicancias de la investigación, y al considerar los países cuyos currículos tienen en cuenta el temprano desarrollo del pensamiento algebraico a nivel escolar, es pertinente y necesario que sus formaciones docentes promuevan el desarrollo de habilidades para tratar el álgebra como una aritmética generalizada. De esta forma, tanto estudiantes de pedagogía como docentes en servicio, pueden tener mayores oportunidades para ofrecer diseños de situaciones de aprendizaje que propicien el tránsito de la aritmética al álgebra en la escuela, tal como lo sugieren los Estándares de la Profesión Docente para las carreras de Pedagogía en Educación General Básica en Chile (Ministerio de Educación de Chile, 2022).

Esta investigación puede proyectarse en dos perspectivas. Una que desarrolle la línea que permita explorar otros problemas en contextos cotidianos como, por ejemplo, días de la semana ($\mathbb{Z}_7$), meses del año ($\mathbb{Z}_{12}$), inclusive, extender el problema matemático de la figura 4 a $\boldsymbol{k}$ estaciones de colores para abordar $\mathbb{Z}_k$ con $k = 5, 6, 7, \ldots, n$. Y otra perspectiva que permita progresar en la idea de conjunto $\mathbb{Z}_4$ hacia la idea de grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$ como estructura algebraica, o bien, avanzar en la comprensión profunda del conjunto generalizado $\mathbb{Z}_n$ en contextos matemáticos para discernir procesos deductivos de pensamiento que pueden emerger en una secuencia de enseñanza para complementar la formación de docentes que enseñan o enseñarán álgebra a escolares.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada parcialmente por ANID a través del Proyecto FONDECYT Nº 1180468 y patrocinado por proyecto *Sumo Primero en Terreno* impulsado por la División de Educación General del Ministerio de Educación de Chile en convenio con la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, año 2019-2021.

REFERENCIAS

Bonilla, D., y Parraguez, M. (2013). *La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento.* Editorial Académica Española.

Bonilla, D., Parraguez, M., y Solanilla, L. (2019). Aprendizaje de las cónicas en la geometría del taxista mediante una secuencia didáctica basado en los modos de pensamiento de Sierpinska. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Aportes a la Práctica Docente desde la Didáctica de la Matemática: Formación Docente* (pp. 165-202). Graó.

Carraher, D., y Schliemann, A. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 193-196). https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_54

Campos, S., y Parraguez, M. (2019). Entendendo sistemas de equações lineares: um estudo de caso no contexto da escola no Chile. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21*(3), 347-368. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p347-368

Chrysostomou, M., y Christou, C. (2019). Un análisis del concepto de pensamiento algebraico basado en evidencia empírica. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 721-781. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604022

Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición, 6*, 27-36. http://www.humanas.unal.edu.co/psicometria/files/7113/8574/5708/Articulo3_Juicio_de_expertos_27-36.pdf

Fréchet, M. (1988). Las Matemáticas y lo Concreto (G. Machado, Trad.; 2.º ed.). Universidad Nacional Autónoma de México. (Original publicado en 1955).

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239-255). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_18

Isoda M., y Olfos R. (2021). Problematics for Conceptualization of Multiplication. En M. Isoda y R. Olfos (Eds.), *Teaching Multiplication with Lesson Study*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6_3

Ivars, P., y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Revista Educación Matemática, 26*(1), 9-38. http://www.doi.org/10.24844/EM2801.01

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151. https://gpc-maths.org/data/documents/kieran2004.pdf

Kieran, C., Pang J., Schifter D., y Ng SF (2016). Survey of the State of the Art. En C. Kieran, J. Pang, D. Schifter y SF NG (Eds.), *Early Algebra. ICME-13 Topical Surveys*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2_2

Lay-Yong, L. (1966). On the Chinese Origin of the Galley Method of Arithmetical Division. *The British Journal for the History of Science, 3*(1), 66-69. https://doi.org/10.1017/S0007087400000200

Merriam, S. B. (1988). *Investigación de estudios de caso en educación: un enfoque cualitativo*. Jossey-Bass.

Ministerio de Educación de Chile (2012). Matemática. En autor (Ed.), *Bases Curriculares para la Educación Básica* (pp. 85-135). Autor. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf#page=215

Ministerio de Educación de Chile (2022). *Estándares Disciplinarios Educación General Básica, Matemática*. Autor. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2022/02/EGB-Matematica.pdf

Parraguez, M. (2018). Miradas didácticas ad hoc en problemas específicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Revista Chilena de Educación Matemática, 11*(1), 9-14. https://www.sochiem.cl/documentos-rechiem/revista-rechiem-11-N1-2018.pdf

Parraguez, M. (2012). *Teoría de los modos de pensamiento en Didáctica de la Matemática*. Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Parraguez, M., Bonilla, D., y Randolph, V. (2021). Un modelo para la comprensión del sistema de los números racionales: un estudio de casos en la formación de profesores. En C. Guerrero-Ortiz, A. Morales y E. Ramos-Rodríguez (Eds.), *Modelación Matemática, aportes para la teoría y práctica desde la Didáctica de la matemática* (pp. 317-352). Graó.

Parraguez, M., Randolph, V., y Bonilla, D. (2020). Sistemas numéricos desde los Modos de Pensamiento: Un estudio de casos. En P. Balda, M. Parra, H. Sostenes y L. Serna (Eds.), *ALME, 33*(2), 17-27. CLAME. https://clame.org.mx/documentos/alme33_2.pdf

Randolph, V., y Parraguez, M. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Revista Formación Universitaria, 12*(6), 57-82. https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-50062019000600057

Sierpinska, A. (2000). One some aspects of student's thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Ediciones Morata.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Struik, D. J. (1980). *Una historia concisa de las matemáticas* (P. Lezama, Trad.; 3.ª ed.). Consejo editorial del Instituto Politécnico Nacional. (Original publicado en 1948).

Vidal-Szabó, P., y Núñez-Fernández, J. (2021). Álgebra Temprana en Niñas y Niños: Secuencias con Regularidad y Patrones. En A. Pizarro, C. Caamaño y C. Brieba (Eds.), *Didáctica de la Matemática para Primer Ciclo de Educación Básica: Aportes a la Formación Continua de Profesores* (pp. 52-69). Ediciones Universitarias de Valparaíso. https://euv.cl/wp-content/uploads/2022/09/ddm_2.pdf#page=52

Weisstein, E. W. (2002). *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press.

Correspondencia

Dirección: Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso, Chile; código postal: 2340000.
pfvidal@udd.cl; marcela.parraguez@pucv.cl;
daniela.bonilla@pucv.cl; sjcampos@uc.cl

 https://doi.org/10.24844/EM3502.08

Relaciones entre el aprendizaje de la estadística y las actitudes del alumnado en el marco de un proyecto de análisis de datos con tecnología

Relationships between statistical performance and student attitudes in the framework of a data analytics project with technology

Andreea Cujba,[1] Manoli Pifarré[2]

Resumen: Estudios previos respaldan la influencia de las actitudes en el aprendizaje de la estadística. Otras investigaciones demuestran cómo el uso de intervenciones educativas innovadoras mejora estas actitudes y el aprendizaje. En el marco de un proyecto internacional, este artículo presenta los resultados de una intervención educativa sobre análisis de datos basada en la resolución de problemas, de forma colaborativa y con tecnología, para: 1) estudiar si mejora el aprendizaje del contenido sobre estadística y 2) si existe una relación positiva entre las actitudes hacia la estadística y el rendimiento académico. Para ello, y en el contexto de una investigación cuasi-experimental más amplia que demostró mejora en las actitudes del alumnado hacia el aprendizaje de la estadística, se ha llevado a cabo un estudio de caso. La muestra está formada por 110 estudiantes españoles de Educación Secundaria. Los resultados del estudio confirman que la metodología de enseñanza basada en proyectos que incluyen análisis de datos, uso de tecnología y trabajo colaborativo, tiene una incidencia positiva en las actitudes del alumnado hacia el aprendizaje de la estadística y el rendimiento.

Fecha de recepción: 13 de mayo de 2022. **Fecha de aceptación:** 23 de febrero de 2023.

[1] Universitat de Lleida, Departamento de Psicología, andreea.cujba@udl.cat, orcid.org/0000-0002-1964-7782.

[2] Universitat de Lleida, Departamento de Psicología, manoli.pifarre@udl.cat, orcid.org/0000-0002-4271-4824.

Palabras clave: *educación secundaria, análisis de datos, actitudes, aprendizaje basado en proyectos, estadística con tecnología.*

Abstract: Previous educational research claims the impact of students' attitudes toward learning on academic performance and, specifically, on learning statistics. Other educative researches have shown how the use of innovative educational interventions could improve these attitudes and learning. In the framework of an international project, this paper reports students' results after their participation in an innovative educational intervention about data analytics based on problem solving, collaborative work and technology. The aim of the study is twofold: (1) study if the educative intervention improves students' performance and (2) if there is a positive relationship between students' attitudes towards statistics and their statistical performance. In order to reach these aims, in the context of a larger quasi-experimental research that it has already reported improvement on the students' attitudes, towards statistics, a case study has been carried out. 110 Spanish secondary education students (13/14-year-old) participated in this study. The results confirm that those projects that embed data analytics, technological tools and collaborative learning have a positive impact on students' attitudes towards statistics and performance.

Keywords: *secondary education, data analytics, attitudes, project-based learning, statistics with technology.*

1. INTRODUCCIÓN

A través del uso de las tecnologías digitales se generan a diario grandes cantidades de datos, con un destacable potencial que, podrían mejorar la calidad de vida en múltiples aspectos. No obstante, si la ciudadanía no recibe la educación necesaria para saber comprender esos datos y cómo convertirlos en conocimiento y acciones, estos no tendrán ninguna utilidad. El análisis y la comprensión de los datos está vinculada a la alfabetización estadística y a análisis. Por consiguiente, muchos autores defienden la necesidad de enseñar estadística, con un enfoque de análisis de datos, para empoderar al alumnado con las estrategias precisas para analizar y argumentar con datos la realidad que nos rodea. De esta manera, los estudiantes serán futuros ciudadanos competentes para el mundo actual, capaces de seguir un proceso de investigación, solucionar problemas y tomar decisiones cabales y respaldadas por el análisis de datos (Díaz-Levicoy *et al.*, 2019).

Por otro lado, la investigación educativa realizada hasta la fecha, pone de manifiesto la influencia que tienen las actitudes del alumnado hacia el aprendizaje en general (López-Aguilar *et al.*, 2021). Concretamente, las actitudes positivas favorecen mejores resultados y un aprendizaje más significativo en el ámbito de las matemáticas y la estadística (Kharuddin y Ismail, 2017; Albelbisi y Yusop, 2018; Muñoz *et al.*, 2018; Dowker *et al.*, 2019; Rodríguez-Santero y Gil-Flores, 2019; Silva y Sousa, 2020). Entendemos por actitudes aquellos sentimientos profundos y reacciones emocionales relativamente estables hacia una asignatura, que surgen de las experiencias –positivas o negativas– vividas a lo largo del tiempo durante el aprendizaje de la materia (Comas *et al.*, 2017; Tuohilampi, 2016). Desde el punto de vista psicológico, se define "actitud" como un rasgo de las personas que influye directamente en su comportamiento (Di Martino y Zan, 2015). Es relevante que el alumnado desarrolle actitudes positivas hacia la estadística para aumentar su interés en los contenidos de esta asignatura. Una propuesta para mejorar las actitudes es la implementación de intervenciones educativas innovadoras. Se aconseja hacer la transición desde la enseñanza tradicional (clases centradas en el docente y rol pasivo del alumnado) a un mayor uso de métodos que incluyan variables educativas, como: I) aprendizaje centrado en el alumnado; II) uso de nuevas tecnologías; III) aprendizaje colaborativo y IV) aprendizaje por proyectos y resolución de problemas reales. Estas variables educativas no solamente mejoran las actitudes del alumnado, sino que, a la vez, estimulan el proceso de aprendizaje. Chew y Dillon (2014) indican la necesidad de realizar más estudios que innoven e implementen métodos para la enseñanza de la estadística, con el enfoque de análisis de datos, tecnología y aprendizaje basado en proyectos.

Intervención innovadora para un mayor aprendizaje

Seguidamente, se aportan las evidencias científicas destacadas por la investigación educativa, en relación a los beneficios del uso de tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de estadística. Respecto a las metodologías innovadoras que promueven el uso de tecnología, nos centraremos en el aprendizaje por proyectos y en el trabajo colaborativo que, son las que caracterizan la intervención estadística del presente estudio.

Primero, en nuestro estudio, fomentamos el uso de la tecnología que se ha extendido cada vez más en las aulas. Concretamente, se emplean cada vez más en las clases de estadística como una herramienta mediadora y promotora del aprendizaje de estrategias de resolución de problemas. En el presente estudio se ha utilizado el software libre CODAP (plataforma común de análisis de datos en línea, disponible en http://codap.concord.org) para la resolución colaborativa de un reto estadístico vinculado a la vida real del alumnado de secundaria. CODAP permite manipular los datos de forma visual para explorar las relaciones entre datos, de forma sencilla e intuitiva. Arrastrando y soltando un grupo de datos concreto encima del gráfico, obtenemos su visualización. Gonzalez y Trelles (2019) y Kazak *et al.* (2014) aportan evidencias de cómo las características de las tecnologías como CODAP o TinkerPlots inciden en la mejora del aprendizaje y actitudes del alumnado. Algunas de las características que destacan de estas tecnologías, son: a) facilitadoras de actividades de modelado (hacer preguntas y analizar situaciones que podrían ser reales, a través de las matemáticas), b) mediadoras del pensamiento conceptual para investigar sucesos de probabilidad e identificar patrones, c) ayudan a mejorar la intuición sobre representación y análisis de datos, y d) facilitan la creación de gráficos. En ambos estudios, el alumnado de educación secundaria, ha aumentado su motivación y ha mejorado la comprensión de la estadística y matemáticas. En la misma línea, Bray y Tangney (2017) ponen de manifiesto que las tecnologías contemporáneas incentivan la colaboración y facilitan un aprendizaje interactivo y contextualizado de las matemáticas a través de la visualización, el modelado y la manipulación. Además, como la tecnología ofrece de forma inmediata instrucciones y retroalimentación, consigue atraer la atención y el interés del alumnado (Attard y Holmes, 2020).

Otros trabajos de investigación apuntan que la tecnología facilita la implementación de tareas constructivistas basadas en la investigación: colaboración, resolución de problemas, poner al alumnado en el centro del proceso de enseñanza-aprendizaje y la práctica de aprender haciendo –*learning by doing*– (Bray y Tangney, 2017; Attard y Holmes, 2020).

Segundo, el presente estudio también promueve el aprendizaje basado en proyectos (ABP, en adelante), metodología caracterizada por la introducción de las siguientes variables educativas: aprendizaje centrado en el alumnado, contenido contextualizado, trabajo dividido en fases de investigación, trabajo colaborativo, y resolución de problemas (Haatainen y Aksela, 2021). Özdemir *et al.* (2015) enfatizan que el ABP ha mejorado el rendimiento de un grupo-clase en el contexto de un proyecto realista de matemáticas, al ser comparado con un grupo control. El alumnado del grupo experimental percibe el proyecto como una actividad divertida que les enseña a trabajar en grupo. En cambio, el grupo control manifiesta que el aprendizaje les resulta aburrido y difícil. En esta misma línea argumental, Batanero y Díaz (2011) defienden la enseñanza de la estadística a través del ABP, siguiendo estas tres indicaciones para la implementación de proyectos: 1) que sean realistas –contextualizar los datos–, 2) abiertos y 3) adaptados al nivel del alumnado. Para que el alumnado otorgue significado a los datos, estos deben proporcionar información sobre un problema. Para solucionar el problema, seguir las siguientes fases de una investigación estadística facilita el trabajo al alumnado: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos, conclusiones sobre el problema planteado.

Tercero, el aprendizaje colaborativo es otro aspecto clave que presentamos. Son varios los estudios experimentales que aportan evidencias de que el trabajo en grupo pequeño es más efectivo que el individual y mejora las actitudes y el aprendizaje de las matemáticas: el alumnado aprende a comunicarse de forma asertiva, percibe las clases como más divertidas y motivadoras, gana autonomía, y aprende estrategias de colaboración (Özdemir *et al.*, 2015; Moreno-Guerrero *et al.*, 2020). Pai *et al.* (2015) también aporta evidencias en su meta-análisis de 124 estudios empíricos, en los que la eficacia y el impacto del aprendizaje colaborativo en pequeños grupos sale ganando frente al aprendizaje individual o competitivo.

Aunque el aprendizaje colaborativo es uno de los aspectos que promueve el aprendizaje por proyectos, en este estudio defendemos un trabajo más explícito de las normas de trabajo grupales. Cuando se habla de aprendizaje colaborativo en el contexto de un aprendizaje por proyectos, se define normalmente como la resolución de tareas complejas en la que un grupo pequeño de estudiantes comparte un mismo objetivo (Lyons *et al.*, 2021; Fredriksen, 2021). Consideramos que no es suficiente esta organización del alumnado por grupos de trabajo para que el trabajo colaborativo sea eficaz, sin enseñarles antes una serie de normas y pautas. De hecho, autores como Lyons *et al.* (2021) señalan la necesidad de enseñar al alumnado estrategias de colaboración. En la misma línea, para un mejor aprendizaje colaborativo, Mercer (2013) señala la importancia de explicitar al alumnado un trabajo basado en procesos de interacción, normas de gestión del grupo y un lenguaje exploratorio. El diálogo exploratorio crea intersubjetividad entre los miembros del grupo porque crean, conjuntamente, nuevos conocimientos y entendimientos. Esto se refleja en la mejora de las actitudes hacia el aprendizaje ya que facilita la comprensión individual del contenido (Mercer *et al.*, 2019; Gómez, 2016). Kazak *et al.* (2014) apuntan que el diálogo también ayuda a mejorar la organización y la gestión del grupo, a la hora de trabajar contenido de estadística en grupo y con tecnología. En su estudio han enseñado al alumnado las siguientes pautas de comunicación dialógica: I) mostrar interés en lo que piensan los demás; II) tener en cuenta diferentes puntos de vista o métodos alternativos; III) asegurarse que todos los miembros del grupo aportan ideas; IV) pedir argumentos a los compañeros, escuchar las explicaciones y esforzarse en comprender y, V) intentar llegar a un consenso antes de llevar a cabo una acción con el ordenador. En la implementación del presente estudio se han seguido todas estas recomendaciones de Mercer *et al.* (2019) y Kazak *et al.* (2014).

Influencia de las actitudes en el aprendizaje de la estadística

Las actitudes afectan las capacidades cognitivas del alumnado, de manera que unas actitudes negativas dificultan la capacidad de atención. A menudo, una parte del alumnado no es consciente de la relevancia que puede tener la estadística para la toma de decisiones acertadas, en un gran número de situaciones cuotidianas. Perciben la estadística como un conjunto de fórmulas y gráficos con escasa aplicación en la vida real y, este hecho dificulta el desarrollo del razonamiento estadístico en estudiantes y adultos ante temas importantes que afectan sus vidas (Ben-Zvi *et al.*, 2018). Por lo tanto, con una actitud positiva hacia el aprendizaje de la estadística, los estudiantes podrían percibir la relevancia de esta materia e intentar mejorar su rendimiento (Silva y Sousa, 2020). Los términos estadística y matemáticas se utilizan indistintamente porque en el origen de las actitudes hacia la estadística hay una fuerte influencia de las actitudes previas desarrolladas hacia las matemáticas en los primeros niveles de aprendizaje, y por ello, suelen ser en el mismo sentido positivo o negativo (Comas *et al.*, 2017; Akbayır, 2019). Además, el alumnado tiene la percepción de que la estadística incluye una gran carga de contenido matemático (Akbayır, 2019).

A través de un meta-análisis, Emmioğlu y Capa-Aydin (2012) han examinado la relación entre las actitudes del alumnado de secundaria hacia la estadística y los resultados obtenidos en los cursos de estadística. Informaron que en la mayoría de los estudios, correlacionan positivamente las actitudes con el rendimiento. En la misma línea, Ajisuksmo y Saputri (2017) detectaron una correlación positiva media y estadísticamente significativa entre las actitudes de alumnado de educación secundaria hacia las matemáticas y las notas obtenidas en la asignatura. La misma relación positiva media, estadísticamente significativa, la obtuvo Bal (2020) en su estudio sobre contenido de matemáticas, pero con alumnado de educación primaria. Otros estudios han concretado su análisis e indican una relación positiva entre los resultados altos del alumnado en matemáticas y niveles bajos de ansiedad matemática –actitud concreta– (Sahri *et al.*, 2017).

Esta relación, entre actitudes y rendimiento, no solamente se limita al aprendizaje del contenido. También hay evidencia científica de la relación entre las actitudes y la resolución de una prueba evaluativa de matemáticas. Dodeen *et al.* (2014) confirman una relación negativa significativa entre ansiedad matemática y habilidades para afrontar una evaluación o test matemático.

El estudio

Lograr un ambiente propicio para el aprendizaje, es un reto educativo, ya que se requieren dos componentes clave: alumnado con actitud positiva hacia la materia de estudio y seguir métodos de enseñanza innovadores (Silva y Sousa, 2020; Bateiha *et al.*, 2020). A través del presente estudio queremos contribuir a la mejora de los resultados académicos en estadística, haciendo énfasis en estos dos componentes: actitudes del alumnado y una enseñanza basada en la resolución colaborativa de problemas reales con tecnología.

La intervención innovadora, del presente estudio, no se centra solamente en mejorar la alfabetización estadística, sino que pone el foco en la enseñanza de estrategias de análisis de datos. Se trata de una intervención que ofrece una visión práctica de la estadística, vinculada al problema y a la vida real del alumnado. Las estrategias de análisis de datos ayudan a resolver y comprender situaciones reales complejas. El análisis de datos estructura el trabajo en fases y facilita la resolución del problema real planteado, a través de la interpretación de los datos. Se trata de un proceso de exploración de los datos para encontrar patrones entre ellos, sacar conclusiones, tomar decisiones y, finalmente, evaluar las acciones presentes y futuras que se deberían llevar a cabo (Fujita *et al.*, 2018). La intervención de este estudio busca dotar al alumnado de las estrategias necesarias para saber reconocer cuándo se necesitan datos, plantear preguntas que se puedan responder con datos, cómo y de dónde recoger datos, organizarlos para su posterior análisis con herramientas tecnológicas de visualización (con el software CODAP) y aprender a tomar decisiones basadas en los datos, reconociendo la incertidumbre.

Basado en todo lo anterior, nuestro objetivo será estudiar si la intervención educativa diseñada genera una relación positiva entre las actitudes del alumnado hacia el aprendizaje de la estadística y el aprendizaje del contenido. En concreto, el estudio pretende corroborar las siguientes hipótesis:

1. La intervención educativa, que tiene por objetivo la resolución colaborativa de un reto sobre estadística con tecnología, tiene un impacto positivo en el aprendizaje individual de estadística.
2. La mejora de las actitudes hacia la estadística se correlaciona positivamente con el aprendizaje individual del contenido de estadística.
3. La mejora de cada uno de los tres factores que forman el cuestionario de actitudes hacia la estadística (ansiedad, aprendizaje de la estadística con tecnología, afecto) se correlaciona positivamente con el aprendizaje individual del contenido de estadística.

2. MÉTODO Y PARTICIPANTES

Las hipótesis se estudiarán siguiendo una metodología de estudio de caso, con una evaluación pre-post y una intervención de larga duración (28 sesiones, 50 minutos/sesión), en un contexto real de clase. En la intervención educativa participó alumnado de 6 clases, formando un total de 110 estudiantes de 2º de Educación Secundaria Obligatoria, con una distribución de género homogénea: 52,7% (58) chicas y 47,3% (52) chicos. Se trata de un centro concertado de titularidad religiosa, de nivel sociocultural medio y con una ratio de alumnado inmigrante baja. La muestra presenta un nivel de rendimiento académico general similar, tal como lo señalan los resultados de la Prueba Nacional de Competencias Básicas. En relación al contenido de estadística, es la primera vez que aprenden una unidad didáctica entera de estadística, ya que en cursos previos habían estudiado principalmente los temas de la probabilidad y el azar. Se analiza la actitud que presenta el alumnado hacia el aprendizaje de la estadística y el aprendizaje que alcanzan durante la intervención.

La muestra forma parte de un proyecto internacional que se titula *Strategic Partnership for Innovation in Data Analytics in Schools* (SPIDAS en adelante), financiado por el programa ERASMUS+ de la Unión Europea. La intervención educativa llevada a cabo en el marco del proyecto SPIDAS se ha centrado en enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística en secundaria a partir del desarrollo de cuatro ejes didácticos: (a) aprendizaje centrado en el alumnado; (b) aprendizaje basado en proyectos; (c) uso de tecnología como herramienta de pensamiento y de desarrollo de los procesos de resolución de problemas estadísticos y de la toma de decisiones basada en datos, y (d) resolución colaborativa de problemas cuotidianos. En un estudio previo (Cujba y Pifarré, en prensa) se realizó un estudio cuasi-experimental, en el que se analizó el impacto de la intervención educativa SPIDAS en las actitudes del alumnado hacia el aprendizaje de la estadística, comparando un grupo control y un grupo experimental. Los resultados mostraron mejoría significativa en las actitudes del alumnado del grupo experimental y ninguna mejora significativa en las actitudes del grupo control, que siguió una metodología de enseñanza-aprendizaje tradicional. El presente artículo pretende mediante un estudio de caso, analizar en profundidad si la mejora de las actitudes del alumnado hacia la estadística también puede incrementar el aprendizaje del contenido de estadística. Para ello, la muestra del estudio de caso será el alumnado que ha seguido la intervención SPIDAS. Al no haber grupo control, el presente estudio no es experimental. Según Süğümlü (2021), se trata de un estudio de caso porque el objetivo de la metodología es presentar conclusiones en profundidad para una situación particular. Como se comenta en el artículo de revisión de Chaves y Weiler (2016), concretamente es un estudio de caso intrínseco porque el caso en sí es de interés, pero no es representativo de otros casos ni los resultados son generalizables estadísticamente a toda la población. El grupo analizado se ha elegido por el interés que despertó en un estudio cuasi-experimental previo, al destacar sus resultados por ser mejores que los del grupo control.

3. INSTRUMENTOS

3.1 Prueba de evaluación del aprendizaje de estadística

La prueba para evaluar el aprendizaje de la estadística empleada, fue creada ad hoc en el seno del proyecto internacional SPIDAS (Anexo 1), con la colaboración de profesores universitarios de matemáticas, especializados en la enseñanza de la estadística.

Se tuvo en cuenta el contenido de la intervención educativa para su elaboración y consta de cinco preguntas complejas que evalúan conceptos fundamentados en el ciclo de análisis de datos y de alfabetización estadística. El ciclo de análisis de datos implementado en la intervención SPIDAS está formado por seis estrategias clave de análisis de datos (ver figura 1). El "Ciclo de análisis de datos" se basa en el ciclo de investigación estadística PPDAC (Wild y Pfannkuck, 1999), el pensamiento estadístico (Wild *et al.*, 2011) y la inferencia estadística informal (Makar y Rubin, 2009, 2018). En el contexto del proyecto SPIDAS, este ciclo de investigación se utilizó para resolver problemas de la vida real, relacionados con el clima.

Figura 1. *Definición de las seis estrategias de la intervención*

Fuente: Elaboración propia.

En los cinco problemas estadísticos señalados en el Anexo 1, se pedía al alumnado argumentación estadística, en base a las estrategias de análisis de datos aprendidas durante la intervención educativa. El problema 1 de la prueba se centra en la exploración de los datos, que requiere hacer cálculos y buscar patrones en una situación que podría ser real, de escoger al mejor jugador de básquet teniendo en cuenta sus puntuaciones en los últimos partidos. Se espera que el alumnado calcule la media, la mediana, el rango y la variabilidad. Después, tienen que tomar una decisión y argumentar su conclusión usando los datos como evidencia, y decidir las acciones a seguir. El problema 2 requiere considerar los datos y seleccionar en diferentes situaciones el tipo de variable –cualitativa o cuantitativa– y razonar la elección. El problema 3 presenta un gráfico que compara la duración de las baterías de dos marcas diferentes y pide razonar cuál de las dos marcas es la mejor. Para resolverlo se solicita explorar los datos (visualizar, calcular y buscar patrones), sacar conclusiones expresando incertidumbre y tomar decisiones. Se precisa calcular la media, el rango, la variabilidad y técnicas de conteo (probabilidad). El problema 4 presenta la puntuación media de dos equipos en salto de longitud y se pide al alumnado escoger de entre cuatro opciones, la verdadera, y razonar la elección. Para solucionar el problema, se debe explorar los datos, sacar conclusiones expresando incertidumbre y conocer el significado de la media estadística. El problema 5 y último, muestra un gráfico que compara las pulsaciones/minuto de dos grupos de personas que habitan en condiciones de vida diferentes. El alumnado debe responder cuál de los dos grupos tiende a tener una frecuencia cardíaca mayor. Para ello, tienen que explorar los datos (visualizar y buscar patrones) y sacar conclusiones, generalizando y expresando incertidumbre. En cuanto a alfabetización estadística, se precisa saber interpretar la media, la mediana, la moda, el rango, la variabilidad, la frecuencia y técnicas de conteo (probabilidad).

En cuanto a la corrección de la prueba, se ha seguido una rúbrica de evaluación con las puntuaciones máximas de cada pregunta segmentadas en variables categóricas. Para facilitar tanto la evaluación del alumnado, como para el análisis estadístico de los datos, cada variable categórica tiene un valor numérico. Por ejemplo, la puntuación máxima de los problemas 3 y 5 podía ser de 3 puntos, por la complejidad de la argumentación estadística que se pedía. En el caso del problema 3, que en un gráfico comparaba dos marcas de baterías para decidir cuál es mejor, se ha valorado con las siguientes puntuaciones: 0 puntos –si solamente escogían una de las dos marcas de baterías sin argumentos estadísticos; 1,5 puntos– si calculan solamente o la media o la desviación estándar (constancia de cada marca), pero no tienen en cuenta ambos cálculos; 3 puntos –si tienen en cuenta tanto las medias de duración de las baterías, como la variabilidad de cada marca, para sacar la mejor conclusión basada en los datos.

Finalmente, la puntuación máxima de la prueba es de 10 puntos y se reparten de la siguiente manera: problema 1 – 1 punto; problema 2 – 1 punto; problema 3 – 3 puntos; problema 4 – 2 puntos; problema 5 – 3 puntos.

3.2 Cuestionario de actitudes hacia la estadística con uso de tecnología

Las actitudes hacia la estadística del alumnado se han evaluado a través de un cuestionario adaptado al español y validado de forma exploratoria (Cujba y Pifarré, en prensa) con una muestra de 254 estudiantes españoles de Educación Secundaria. Se formó a partir de cuestionarios previos, haciendo una doble traducción de los ítems originales y siguiendo un proceso de validación entre jueces expertos. El cuestionario (Anexo 2) está formado por 16 ítems pertinentes a 3 factores: Ansiedad (i5, i7, i10, i11, i12), Aprendizaje de estadística con tecnología (i2, i4, i6, i9, i13, i16) y, Afecto (i1, i3, i8, i14, i15). La escala Likert tiene cuatro opciones: 1=Totalmente en desacuerdo, 2=En desacuerdo, 3=De acuerdo, 4=Totalmente de acuerdo.

Los ítems negativos (factor Ansiedad) se invirtieron antes del análisis de datos, de manera que las puntuaciones altas de todos los ítems del cuestionario representan resultados positivos –es decir, actitudes positivas hacia la estadística, bajo nivel de ansiedad hacia la estadística, actitudes positivas hacia el aprendizaje de la estadística con tecnología y afecto positivo hacia la estadística.

A través del análisis factorial exploratorio, se confirmó una estructura de tres factores –ansiedad, aprendizaje de estadística con tecnología y afecto. Los resultados arrojaron propiedades psicométricas idóneas del cuestionario para la evaluación de las actitudes hacia la estadística con tecnología en alumnado español de educación secundaria. En cuanto al índice de validez de contenido, todos los ítems que forman el cuestionario han obtenido un índice superior o igual a 0,75. Por último, respecto a la consistencia interna que se ha calculado a través del análisis estadístico de Alfa de Cronbach, la correlación entre los 16 ítems ha resultado alta: $\alpha = 0.83$.

4. PROCEDIMIENTO

El procedimiento experimental constó de tres momentos: (1) antes de la intervención, en el que el alumnado contestó la prueba de evaluación de aprendizaje de la estadística y el cuestionario de actitudes hacia la estadística; (2) en el que el alumnado realizó una intervención educativa orientada a la resolución colaborativa de un reto sobre estadística con tecnología y, (3) después de la intervención, en el que el alumnado contestó de nuevo la prueba de evaluación de aprendizaje de estadística y el cuestionario de actitudes hacia la estadística. El alumnado contestó ambos instrumentos de evaluación de forma individual: el cuestionario de actitudes a través de un formulario de Google y la prueba de evaluación de aprendizaje de estadística, en papel.

La intervención educativa del grupo experimental tuvo una duración de 28 sesiones de aula y consistió en la realización de un proyecto estadístico, implicado en la asignatura de matemáticas, para resolver un problema de la vida real sobre cómo influye el tiempo en nuestras actividades cotidianas. El impacto del tiempo y del cambio climático en nuestras vidas es un tema de gran interés y de actualidad y se animó al alumnado a recoger datos reales (de forma directa y/o en bases de datos), entenderlos e interpretarlos y dar respuestas argumentadas al cambio climático. El alumnado trabajó en pequeños grupos de tres formados al azar y se mantuvieron las mismas agrupaciones a lo largo de las 28 sesiones. Se combinó el trabajo presencial en el aula, con el trabajo fuera del aula. Fuera del aula, los grupos trabajaron de forma sincrónica con la plataforma Drive de Google.

El diseño del proyecto de estadística, SPIDAS, incorpora de forma innovadora los tres ejes pedagógicos que la literatura revisada apunta como claves para promover estrategias de análisis de datos en el alumnado, que son: 1) aprendizaje basado en proyectos impulsados por datos; 2) aprendizaje colaborativo y 3) uso de tecnología para ayudar a aprender estadística. En el presente estudio se ha utilizado el software libre CODAP. A continuación, exponemos cómo se han incorporado estos tres ejes en la intervención educativa diseñada en esta investigación.

1) *Aprendizaje basado en proyectos impulsados por datos*. La intervención SPIDAS incorpora de forma explícita las cinco características educativas del aprendizaje por proyectos y destacadas en la revisión de literatura (Batanero y Díaz, 2011; Bateiha *et al.*, 2020; Haatainen y Aksela, 2021): a) estructuración del proceso de aprendizaje del alumnado en fases; b) trabajo del contenido sobre estadística contextualizado en la vida real y cotidiana, c) promoción de un rol activo de los estudiantes y rol de guía del docente; d) aprendizaje centrado en el alumnado y e) desarrollo de habilidades analíticas de datos.

2) *Aprendizaje colaborativo*. El alumnado ha llevado a cabo el proyecto, en su totalidad, mediante trabajo colaborativo. Se han desarrollado estrategias concretas de trabajo en pequeño grupo y de habla exploratoria (Mercer, 2013). Han trabajado en grupos pequeños formados por tres miembros y se han desarrollado algunas actividades del programa "Thinking Together" (Mercer *et al.*, 2019). Entre estas actividades, destacamos las tres siguientes: a) reflexión sobre los roles grupales, b) reflexión sobre las actitudes y comportamientos durante el trabajo en grupo, y c) construcción del grupo ideal, a través del consenso de normas.

3) *Tecnología*. Se ha enseñado al alumnado a utilizar el software de análisis de datos CODAP, que permite la visualización gráfica de los datos y facilita la comprensión y la interpretación de los datos. Gracias al diseño interactivo y manipulable de CODAP, el alumnado puede experimentar con sus propios datos y obtener de forma inmediata gráficos representativos de sus investigaciones.

La tecnología sincrónica, vinculada al Drive, ha promovido procesos de trabajo colaborativo y dialógico singulares: a) la discusión de ideas entre alumnado y, por lo tanto, procesos de pensamiento con otras personas; b) compartir ideas con los compañeros, co-construir nuevas ideas, planificar y reflexionar sobre el trabajo conjunto; c) procesos de aprendizaje de conceptos de estadística (aprendizaje con otras personas – L2L2) y d) ha ayudado al alumnado a organizar los datos, manipularlos, crear gráficos y analizarlos.

4.1 Análisis de datos

Para analizar los datos recogidos se ha seguido un proceso de investigación de estudio de caso (Guerrero *et al.*, 2018).

Para el análisis se ha empleado el paquete de análisis estadístico SPSS 26.0 y se han realizado las siguientes pruebas estadísticas:

- Test de Shapiro-Wilk para analizar la normalidad de la muestra. Al no presentar una distribución normal, los cálculos estadísticos aplicados posteriormente son no paramétricos.
- Prueba de Wilcoxon no paramétrica, para muestras relacionadas. Se ha llevado a cabo para comparar los resultados entre el pretest y el postest de la prueba de evaluación de aprendizaje de estadística.
- Coeficiente de correlación de Spearman, para evaluar la relación entre las actitudes hacia la estadística y el aprendizaje de la materia.

5. RESULTADOS

En este apartado se analiza, por un lado, la incidencia de la variable independiente del estudio –intervención educativa SPIDAS basada en la resolución colaborativa de un reto sobre estadística con tecnología–, sobre la variable dependiente –prueba de evaluación de aprendizaje de estadística–. Por otro lado, se analiza si existe correlación entre las dos variables dependientes del estudio: Prueba de evaluación de aprendizaje de estadística y Cuestionario de actitudes hacia la estadística.

5.1 Evaluación del aprendizaje de la estadística

En la tabla 1 se muestran los resultados de la prueba de Wilcoxon. Primero, se observa diferencia significativa (α=0.05) en la puntuación total de la prueba de evaluación de aprendizaje de estadística. Segundo, también se indica diferencia significativa de las preguntas de la prueba 1, 2, 3 y 5. Aunque la pregunta 4 de la prueba presenta una tendencia positiva, no se ha obtenido diferencia significativa.

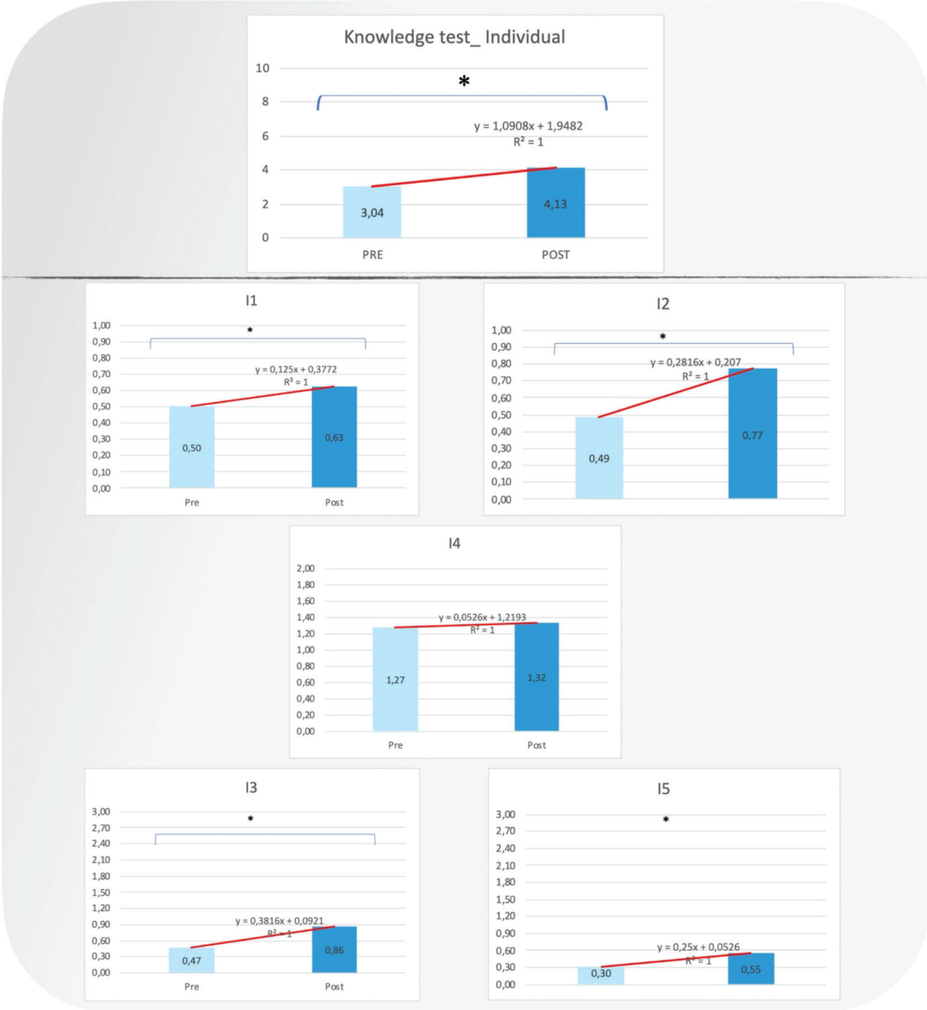
Tabla 1. Nivel de significación entre los resultados pretest y postest de la prueba de evaluación de aprendizaje de estadística

Dependent variables	Sig. asin. (bilateral)	Effect size
TOTAL_I_10p	,001*	r= .38
I1_1p	,001*	r= .22
I2_1p	,001*	r= .46
I3_3p	,001*	r= .28
I4_2p	,499	r= .05
I5_3p	,008*	r= .17

*p<0.05
Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 1 muestra las puntuaciones medias tanto del pretest como del postest de la prueba de evaluación de aprendizaje, siendo favorables las del postest. Los valores del eje y representan los puntos totales que puede tener, por un lado, la prueba de evaluación de aprendizaje (10p), y, por otro, cada una de las preguntas que forman la prueba (1p, 2p o 3p). De los 5 problemas estadísticos de la prueba, el cuarto no presenta diferencia significativa pre-post, pero se observa que sigue la misma tendencia de mejora que los demás. Así pues, la intervención educativa SPIDAS ha favorecido el aprendizaje de contenido de estadística.

Gráfico 1. Puntuaciones medias del pretest y postest de la prueba de evaluación de aprendizaje de estadística: total y por preguntas



Fuente: Elaboración propia.

5.2 Relación entre actitudes y aprendizaje

Uno de los objetivos del presente estudio es saber si hay correlación positiva entre la mejora de las actitudes hacia la estadística y el aprendizaje individual de estadística. Por ello, se ha calculado y analizado el Coeficiente de correlación de Spearman.

Para el análisis correlacional, se estudió, por un lado, la relación entre la prueba de evaluación de aprendizaje y la actitud global, y, por otro, la relación entre la prueba de evaluación de aprendizaje y cada uno de los tres factores del cuestionario de actitudes. Para un análisis más profundo, se ha buscado la relación entre cada uno de los problemas de estadística de la prueba de evaluación de aprendizaje y las actitudes (global y por factores).

En primer lugar, antes de la intervención, la correlación entre las dos variables era escasa o débil. No obstante, después de la intervención se detecta una relación positiva media y estadísticamente significativa entre ambas variables (tabla 2): las actitudes y el rendimiento del alumnado van en la misma dirección. La prueba de evaluación de aprendizaje también presenta una correlación positiva media y estadísticamente significativa con el factor "Afecto" del cuestionario de actitudes (la misma relación que antes de la intervención). Los otros dos factores del cuestionario de actitudes, "Ansiedad" y "Aprendizaje de estadística con tecnología" presentan una correlación positiva más débil con la prueba de evaluación de aprendizaje de estadística, después de la intervención.

En segundo lugar, a través de un análisis más profundo, se han detectado correlaciones entre las actitudes del alumnado y los problemas de estadística concretos que forman la prueba individual, después de la intervención. Se observa que el primer problema es el que mayor relación positiva tiene con las actitudes: presenta una correlación positiva media con la actitud global, con el factor "Afecto" y con el factor "Ansiedad". Con el factor "Aprendizaje de estadística con tecnología" muestra una correlación positiva más débil. Todas estas relaciones del problema 1 son estadísticamente significativas. Atendiendo a los datos, una posible explicación de la mejora en la puntuación del problema 1 podría ser la mejora del afecto hacía la estadística y la disminución de la ansiedad (factor con el que mayor correlación presenta).

Otro problema que correlaciona con las actitudes del alumnado es el problema 4 de la prueba de evaluación de aprendizaje. Nos centramos en el momento post-intervención, ya que nos interesa conocer la influencia de la intervención en las variables dependientes. Se trata de una correlación positiva media y estadísticamente significativa con la actitud global y con el factor

"Ansiedad". Teniendo en cuenta este hallazgo, una de las posibles explicaciones de la mejora en la puntuación del problema 4 podría ser la disminución de la ansiedad hacia la estadística.

Tabla 2. Coeficientes de correlación de todas las variables

	PRE				POST			
	Actitud_ global	Actitud_ ansiedad	Actitud_ tecnologia	Actitud_ afecto	Actitud_ global	Actitud_ ansiedad	Actitud_ tecnologia	Actitud_ afecto
TOTAL_I_10p	0.185	0.159	-0.032	0.233*	0.244*	0.169	0.163	0.223*
I1_1p	0.297**	0.368**	-0.035	0.317**	0.398**	0.319**	0.196*	0.441**
I2_1p	-0.019	-0.035	-0.062	-0.031	0.112	0.095	0.056	0.060
I3_3p	0.057	0.077	-0.083	0.076	0.000	-0.006	0.055	-0.022
I4_2p	0.194*	0.168	0.119	0.194*	0.220*	0.211*	0.124	0.180
I5_3p	0.133	0.102	-0.016	0.123	0.044	0.016	0.020	0.029

*$p<0.05$
**$p<0.01$
Fuente: Elaboración propia.

6. DISCUSIÓN

En líneas generales, los resultados de nuestro estudio corroboran una mejora del aprendizaje de la estadística y también una relación entre las actitudes y el aprendizaje de contenido de estadística, tras la implementación de una intervención educativa basada en trabajo por proyectos, trabajo colaborativo y con uso de tecnología, a través de un estudio de caso.

Los resultados concuerdan con los de estudios previos que defienden los efectos positivos de intervenciones educativas con las mismas características que la nuestra, en el aprendizaje de la estadística (Gonzalez y Trelles, 2019; Biehler, 2019; García-Martín y Cantón-Mayo, 2019; Woodard *et al.*, 2020; Haatainen y Aksela, 2021). También concuerdan con las investigaciones que aportan evidencia de la influencia positiva de las actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas (Pitsia *et al.*, 2017; Al-Mutawah y Fateel, 2018; Cantero *et al.*, 2018).

En relación a la incidencia de la intervención educativa en el aprendizaje individual de estadística (H1), los resultados de la prueba de evaluación de contenido se han incrementado en el momento post-intervención. Las metodologías utilizadas en la intervención educativa implementada, han impactado en el aprendizaje de la estadística. La característica destacada de la intervención es el uso de nuevas tecnologías, por las múltiples facilidades que aporta en la visualización y el análisis de datos. Los resultados del estudio de Ciftci *et al.* (2014) respaldan nuestros resultados, al concluir que los cursos de estadística que utilizan herramientas tecnológicas reducen la ansiedad del alumnado, tienen un impacto positivo en las actitudes hacia el aprendizaje de estadística y mejoran el rendimiento al finalizar los cursos. La tecnología utilizada, en concreto el software CODAP, ayuda a alejar el foco de atención de los cálculos estadísticos complejos (propio de las clases tradicionales) y guía al alumnado en la selección de los análisis más apropiados para su problema y en cómo interpretar los datos (Fujita *et al.*, 2018). Esto es posible gracias a la visualización de conceptos estadísticos, que se consigue con representaciones y simulaciones dinámicas creadas por las herramientas tecnológicas. Estas simulaciones ofrecen la posibilidad de representar los mismos datos de diferentes formas: gráficos, tablas, entre otras. Además, el alumnado puede manipular algunos aspectos de las representaciones para explorar otras relaciones entre los datos, gracias a 3 cualidades de la tecnología: la visualización, el modelado y la manipulación (Bray y Tangney, 2017). El estudio de Bray y Tangney (2017) respalda el uso de tecnología para conseguir cambiar la dinámica de las clases tradicionales, en las que el profesorado dirige la sesión y transmite conocimiento, a una dinámica investigadora centrada en el alumnado. Con base en los resultados positivos obtenidos, promovemos la enseñanza de análisis de datos, ya que ofrece al alumnado la oportunidad de desarrollar habilidades cada vez más necesarias para afrontar actividades de la vida real, como son: cuestionarse sobre diversos problemas cuotidianos, hipotetizar, explicar y discutir sus ideas, y poder ofrecer soluciones o resultados (Siswono *et al.*, 2018). Por eso, es muy importante que los estudiantes se conciencien de la aplicabilidad de la estadística en la vida cuotidiana. Reforzamos este punto de vista con Batanero y Díaz (2011), que consideran de crucial importancia enseñar al alumnado a leer e interpretar tablas y gráficos estadísticos, ya que aparecen a menudo en los diversos medios informativos. Además, con frecuencia también aparecen gráficos u otros conceptos estadísticos en temas curriculares diferentes a las matemáticas. Estas autoras defienden que el estudio de estadística promueve el desarrollo de un razonamiento crítico, a través de la apreciación y toma de decisiones basada en la evidencia objetiva (datos).

Atendiendo a los resultados sobre correlación, el presente estudio concluye que existe una relación positiva media y estadísticamente significativa entre las actitudes del alumnado hacia la estadística y el aprendizaje del contenido (H2). Este resultado es similar a otras investigaciones de la literatura, que han encontrado la misma correlación (Dodeen *et al.*, 2014; Reçber *et al.*, 2018).

Concerniente a la correlación entre cada uno de los tres factores del cuestionario de actitudes hacia la estadística y el aprendizaje individual del contenido (H3), los resultados proyectan una relación positiva media y estadísticamente significativa entre el factor 3 *afecto* y el aprendizaje. Los otros dos factores tienen una correlación más débil y no es significativa. Para comprender la índole de estas observaciones, necesitamos tener una definición clara de la dimensión *afecto*. Ghasemi y Burley (2019) definen el afecto hacia el ámbito de las matemáticas como la confianza en las matemáticas, que al alumnado le guste o no esta materia, y la valoración que hacen de las matemáticas. Por ende, los resultados de nuestro estudio sugieren que un mayor rendimiento del alumnado en estadística se explicaría, en gran medida, por un aumento de la motivación y un juicio positivo sobre la utilidad del contenido en la vida real (Koparan y Güven, 2014).

Que la correlación arrojada por nuestros datos no sea superior, podría ir en consonancia con el estudio de Dodeen *et al.* (2014), que sugiere que la educación también se debe orientar a la mejora de las habilidades del alumnado para afrontar una prueba evaluativa y, no centrarse solamente en las actitudes relativas al aprendizaje. Si empoderamos al alumnado con las habilidades necesarias para realizar con éxito las evaluaciones, podríamos contribuir a disminuir sus niveles de ansiedad (Dodeen *et al.*, 2014). Este hecho podría explicar también, en parte, los resultados no significativos entre el pre y el post de algunos problemas de la prueba de evaluación del presente estudio. Es probable que algunos estudiantes tuvieran los conocimientos estadísticos necesarios, pero que, debido a actitudes negativas ante la situación de ser examinados, se haya visto afectado su rendimiento en el momento de realizar la prueba. Otra posible aclaración al nivel de relación positiva obtenida en nuestro estudio y al hecho de que no haya resultado mayor, podría ser la conclusión a la que llegaron Mohamed *et al.* (2012) en su investigación, de que las actitudes no correlacionan con el aprendizaje. Señala que en su estudio había alumnado que, a pesar de mostrar actitudes positivas, el rendimiento era bajo en el curso de estadística. El autor sugiere que los cambios en el aprendizaje requieren tiempo.

Por lo expuesto, consideramos esencial realizar más investigaciones e intervenciones educativas para aportar evidencia sobre cómo enseñar el contenido de estadística, de manera que sea una asignatura interesante para el alumnado y entiendan la importancia del análisis de datos para resolver situaciones reales.

Limitaciones

El hecho de que la correlación entre la actitud del alumnado hacia la estadística y el resultado académico de la materia no sea mayor, se podría explicar por diversos factores: la muestra es pequeña, por los instrumentos de evaluación y/o que el logro estadístico se ve afectado no solamente por las actitudes, sino también por el clima escolar/de clase y por el estilo de enseñanza del profesor. Además, la correlación entre las actitudes y el aprendizaje de la estadística aumenta con la edad del alumnado (Camacho *et al.*, 2019). Es decir, a mayor nivel académico, mayor es el impacto de las actitudes en el aprendizaje de la estadística.

Una limitación, que tendremos en cuenta y sugerimos para futuras investigaciones, es el hecho de no haber evaluado la relación directa entre las habilidades del alumnado de ser examinado y su rendimiento en estadística. Se necesitan más investigaciones para conocer las relaciones entre las actitudes, las habilidades para realizar pruebas evaluativas y el rendimiento académico, en el ámbito de las matemáticas.

Implicaciones para la educación

Se concluye que el factor “afecto” de las actitudes correlaciona de forma positiva y significativa con el aprendizaje, hecho que apunta a la importancia de que el alumnado comprenda la utilidad y aplicabilidad del contenido a la vida real. Por ello, es necesario cambiar el paradigma educativo que reduce la estadística a la enseñanza de múltiples fórmulas sin contextualizar, hacia la educación del razonamiento estadístico basado en los datos: trabajar la modelación y la visualización del conjunto de datos para encontrar patrones, y poder hacer predicciones basadas en la variabilidad de los datos, en vez de observar los valores individualmente (Kazak *et al.*, 2021). Es necesario que el profesorado reflexione sobre qué y cómo se enseña estadística y qué sienten los estudiantes.

REFERENCIAS

Ajisuksmo, C. R. P. y Saputri, G. R. (2017). The influence of attitudes towards mathematics, and metacognitive awareness on mathematics achievements. *Creative Education, 8*(3), 486-497. https://doi.org/10.4236/ce.2017.83037

Akbayır, K. (2019). An investigation about high school students' mathematics anxiety level according to gender. *Journal of Education and Training Studies, 7*(7), 62-70. https://doi.org/10.11114/jets.v7i7.4201

Albelbisi, N. A. y Yusop, F. D. (2018). Secondary school students' use of and attitudes toward online mathematics homework. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET, 17*(1), 144-153. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1165745.pdf

Al-Mutawah, M. A. y Fateel, M. J. (2018). Students' achievement in math and science: how grit and attitudes influence? *International Education Studies, 11*(2), 97-105. https://doi.org/10.5539/ies.v11n2p97

Attard, C. y Holmes, K. (2020). "It gives you that sense of hope": An exploration of technology use to mediate student engagement with mathematics. *Heliyon, 6*(1), e02945. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e02945

Bal, A. P. (2020). Attitudes and beliefs of primary school teaching undergraduate students towards mathematics and their effects on mathematics achievement. *Cukurova University Faculty of Education Journal, 49*(2), 826-841. https://doi.org/10.14812/cufej.694626

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.

Bateiha, S., Marchionda, H. y Autin, M. (2020). Teaching style and attitudes: a comparison of two collegiate introductory statistics classes. *Journal of Statistics Education, 28*(2), 154-164. https://doi.org/10.1080/10691898.2020.1765710

Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K., y Ainley, J. (2018). Design of statistics learning environments. En *International handbook of research in statistics education* (pp. 473-502). Springer, Cham.

Biehler, R. (2019). Software for learning and for doing statistics and probability – Looking back and looking forward from a personal perspective. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. MolinaPortillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Bray, A. y Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research–A systematic review of recent trends. *Computers & Education, 114*, 255-273. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004

Camacho, X. G. O., Martínez, S. J. R. y de Miguel, C. R. (2019). Actitudes hacia la estadística en alumnos de educación: análisis de perfiles. *Revista de Educación, 385*(7), 173-192. https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2019-385-421

Cantero, J. M. M., Arias, M. A. y Vázquez, M. D. M. (2018). Elementos predictores del rendimiento matemático en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Profesorado, Revista de curriculum y formación del profesorado, 22*(3), 391-413. https://doi.org/10.30827/profesorado.v22i3.8008

Chaves, V. E. J., y Weiler, C. C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico. *ACADEMO Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades, 3*(2).

Chew, P. K. y Dillon, D. B. (2014). Statistics anxiety update: Refining the construct and recommendations for a new research agenda. *Perspectives on Psychological Science, 9*(2), 196-208. https://doi.org/10.1177/1745691613518077

Ciftci, S. K., Karadag, E. y Akdal, P. (2014). Instruction of statistics via computer-based tools: Effects on statistics' anxiety, attitude, and achievement. *Journal of Educational Computing Research, 50*(1), 119-133. https://doi.org/10.2190/EC.50.1.f

Comas, C., Martins, J. A., Nascimento, M. M., y Estrada, A. (2017). Estudio de las actitudes hacia la estadística en estudiantes de psicología. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*, 479-496.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2019). Chilean children's reading levels of statistical graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(1), 689–700. https://doi.org/10.29333/iejme/5786

Di Martino, P., y Zan, R. (2015). The construct of attitude in mathematics education. In B. Pepin, B. Roesken-Winter (Eds.), From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education (pp. 269-277). Springer.

Dodeen, H. M., Abdelfattah, F. y Alshumrani, F. A. (2014). Test-taking skills of secondary students: the relationship with motivation, attitudes, anxiety and attitudes towards tests. *South African Journal of Education, 34*(2), 1-18. https://doi.org/10.15700/201412071153

Dowker, A., Cheriton, O., Horton, R. y Mark, W. (2019). Relationships between attitudes and performance in young children's mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 100*(3), 211-230. https://doi.org/10.1007/s10649-019-9880-5

Emmioğlu, E. S. M. A. y Capa-Aydin, Y. E. S. I. M. (2012). Attitudes and achievement in statistics: A meta-analysis study. *Statistics education research journal, 11*(2). https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ11(2)_Emmioglu.pdf

Fredriksen, H. (2021). Investigating the affordances of a flipped mathematics classroom from an activity theoretical perspective. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 40*(2), 83-98. https://doi.org/10.1093/teamat/hraa011

Fujita, T., Kazak, S., Turmo, M. P. y Mansour, N. (2018). Strategic partnership for innovative in data analytics in schools. https://blogs.exeter.ac.uk/spidasatexeter/files/2019/01/State_of_Art_Review_partA_final_draft_V3.pdf

García-Martín, S. y Cantón-Mayo, I. (2019). Uso de tecnologías y rendimiento académico en estudiantes adolescentes. *Comunicar: Revista Científica de Comunicación y Educación, 27*(59), 73-81. https://doi.org/10.3916/C59-2019-07

Ghasemi, E. y Burley, H. (2019). Gender, affect, and math: a cross-national meta-analysis of Trends in International Mathematics and Science Study 2015 outcomes. *Large-scale Assessments in Education, 7*(1), 1-25. https://doi.org/10.1186/s40536-019-0078-1

Gómez, L. F. (2016). Intención y competencia pedagógica: el uso del aprendizaje colaborativo en la asignatura de matemáticas en secundaria. *Propósitos y representaciones, 4*(2), 133-179. http://dx.doi.org/10.20511/pyr2016.v4n2.121

Gonzales, N. y Trelles, C. (2019, October). Mathematical modeling and Tinker Plots in solving problems. En *2019 XIV Latin American Conference on Learning Technologies (LACLO)* (pp. 367-374). IEEE. https://doi.org/10.1109/LACLO49268.2019.00068

Guerrero, J. J., Cortez, S. L. y Carchi, C. C. (2018). Características comunes a las diversas modalidades de investigación de corte cualitativo y sus diferencias con las de tipo cuantitativo. En C. L. Escudero y L. A. Cortez (Eds.), *Técnicas y métodos cualitativos para la investigación científica* (pp. 57-71). Editorial Utmach.

Haatainen, O. M. y Aksela, M. (2021). Project-based learning in integrated science education: Active teachers' perceptions and practices. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 9*(1), 149-173. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1392

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. P. (2018). *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. McGraw-Hill Education.

Kazak, S., Fujita, T. y Pifarre, M. (2021). Students' informal statistical inferences through data modeling with a large multivariate dataset. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-21. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1922857

Kazak, S., Fujita, T. y Wegerif, R. (2014, July). Year six students' reasoning about random "bunny hops" through the use of TinkerPlots and peer-to-peer dialogic interactions. In *Proceedings of the 9th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 9).* Flagstaff, Arizona, USA. https://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_9F1_KAZAK.pdf

Kharuddin, A. F. y Ismail, N. A. (2017). Graphing calculator exposure of mathematics learning in a partially technology incorporated environment. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 2529-2537. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01238a

Koparan, T. y Güven, B. (2014). The effect on the 8th grade students' attitude towards statistics of project based learning. *European Journal of Educational Research, 3*(2), 73-85. https://doi.org/10.12973/eu-jer.3.2.73

López-Aguilar, D., Álvarez-Pérez, P.R., y Garcés-Delgado, Y. (2021). El engagement académico y su incidencia en el rendimiento del alumnado de grado de la universidad de La Laguna. *RELIEVE, 27*(1), art. 5. http://doi.org/10.30827/relieve.v27i1.21169

Lyons, K. M., Lobczowski, N. G., Greene, J. A., Whitley, J. y McLaughlin, J. E. (2021). Using a design-based research approach to develop and study a web-based tool to support collaborative learning. *Computers & Education, 161,* 104064. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2020.104064

Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal, 8*(1), 82–105.

Makar, K., y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. In D. Ben-Zvi, K. Makar and J. Garfield (Eds.) *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Springer International Handbooks of Education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7

Mercer, N. (2013). The social brain, language, and goal-directed collective thinking: A social conception of cognition and its implications for understanding how we think, teach, and learn. *Educational Psychologist, 48*(3), 148-168. https://doi.org/10.1080/00461520.2013.804394

Mercer, N., Hennessy, S. y Warwick, P. (2019). Dialogue, thinking together and digital technology in the classroom: Some educational implications of a continuing line of inquiry. *International Journal of Educational Research, 97*, 187-199. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2017.08.007

Mohamed, H., Sahari, N., Judi, H. M. y Wook, T. S. M. T. (2012). Factors affecting FTSM students' achievement in statistics course. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 59,* 125-129. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.255

Moreno-Guerrero, A. J., Rondon Garcia, M., Martinez Heredia, N. y Rodriguez-Garcia, A. M. (2020). Collaborative learning based on harry potter for learning geometric figures in the subject of mathematics. *Mathematics, 8*(3), 369. https://doi.org/10.3390/math8030369

Muñoz, J. M., Arias, M. A. y Mato, M. D. (2018). Elementos predictores del rendimiento matemático en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado, 22*, 391-408. https://doi.org/10.30827/profesorado.v22i3.8008

Özdemir, A. S., Yildiz, F. y Yildiz, S. G. (2015). The effect of project based learning in "ratio, proportion and percentage" unit on mathematics success and attitude. *European Journal of Science and Mathematics Education, 3*(1), 1-13. https://eric.ed.gov/?id=EJ1107876

Pai, H. H., Sears, D. A. y Maeda, Y. (2015). Effects of small-group learning on transfer: A meta-analysis. *Educational psychology review, 27*(1), 79-102. https://doi.org/10.1007/s10648-014-9260-8

Pitsia, V., Biggart, A. y Karakolidis, A. (2017). The role of students' self-beliefs, motivation and attitudes in predicting mathematics achievement: A multilevel analysis of the Programme for International Student Assessment data. *Learning and Individual Differences, 55*, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.03.014

Reçber, S., Işıksal, M. y Koç, Y. (2018). Investigating self-efficacy, anxiety, attitudes and mathematics achievement regarding gender and school type. *Anales de Psicología, 34*(1), 41-51. https://doi.org/10.6018/analesps.34.1.229571

Rodríguez-Santero, J. y Gil-Flores, J. (2019). Actitudes hacia la estadística en estudiantes de Ciencias de la Educación. Propiedades psicométicas de la versión española del Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). *RELIEVE, 25*(1), art. 3. doi: http://doi.org/10.7203/relieve.25.1.12676

Sahri, N. A., Kamaruzaman, W. N. F. W., Jamil, J. M. y Shaharanee, I. N. M. (2017, November). Exploring mathematics anxiety and attitude: Mathematics students' experiences. In *AIP Conference Proceedings, 1905*(1), p. 050039. AIP Publishing LLC. https://doi.org/10.1063/1.5012258

Silva, O. D. L. D. y Sousa, Á. (2020). Effects of life satisfaction on students' attitudes towards statistics and technology and their interrelationships. In *13th International Conference of Education, Research and Innovation (ICERI2020)* (pp. 4994-5002). IATED Academy. https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/5685/1/Silva_article1_ICERI2020.pdf

Siswono, T. Y. E., Hartono, S. y Kohar, A. W. (2018). Effectiveness of project based learning in statistics for lower secondary schools. *Eurasian Journal of Educational Research, 18*(75), 197-212. https://dergipark.org.tr/en/pub/ejer/issue/42536/512578

Süğümlü, Ü. (2021). A case study on teaching Turkish through distance education. *International Journal of Psychology and Educational Studies, 8*(1), 174-190. https://doi.org/10.17220/ijpes.2021.8.1.278

Tuohilampi, L. (2016). Contextualizing mathematics related affect: Significance of students' individual and social level affect in Finland and Chile. *REDIMAT, 5*(1), 7-27. http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2016.1823

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review, 67*(3), 223-248.

Wild, C. J., Utts, J. M., y Horton, N. J. (2011). What is statistics? In D. Ben-Zvi, K. Makar and J. Garfield (Eds.) *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Springer International Handbooks of Education. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7

Woodard, V., Lee, H. y Woodard, R. (2020). Writing assignments to assess statistical thinking. *Journal of Statistics Education, 28*(1), 32-44. https://doi.org/10.1080/10691898.2019.1696257

Autor de correspondencia

MANOLI PIFARRÉ

Dirección: Universitat de Lleida (Departamento de Psicología), España.
Av. de l'Estudi General, 4, Lleida (25001)
manoli.pifarre@udl.cat

Teléfono: +34 973706570

ANEXO 1. Prueba de evaluación del aprendizaje de la estadística

NOMBRE DEL ALUMNO:	CURSO Y CLASE:
CENTRO EDUCATIVO:	FECHA:

RESUELVE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS INDIVIDUALMENTE

I1) El entrenador Pere está seleccionando estudiantes para jugar al equipo de baloncesto más prestigioso de la provincia. Para hacerlo, ha decidido mirar la puntuación de cada jugador durante las últimas tres semanas de la temporada. En la tabla siguiente se muestran los puntos marcados por Aleix y Sergi.

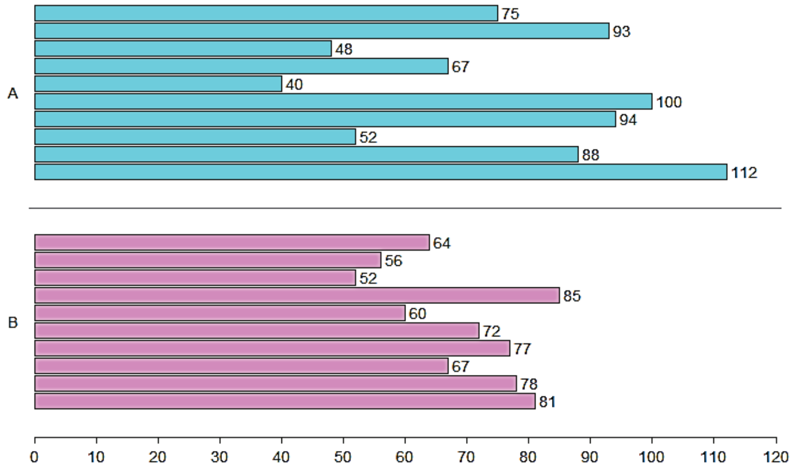
Aleix:	21	16	23	21	20	17	16	22
Sergi:	24	18	21	25	22	28		

Si el entrenador solo puede seleccionar uno de los dos jugadores, ¿quién le recomendarías que escogiera y por qué? Explica las razones de tu decisión.

I2) Para cada una de las siguientes situaciones, selecciona el tipo de variable estudiada y explica el motivo de tu elección:

	Variable cualitativa	Variable cuantitativa	Razona tu selección
a) Si los alumnos de educación secundaria llevan gafas	☐	☐	
b) El número de alumnos de cada clase de nuestro centro que practican un deporte de equipo	☐	☐	
c) El tiempo que los alumnos pasan conectados a las redes sociales diariamente	☐	☐	
d) La red social más popular de nuestro instituto	☐	☐	
e) El número de calzado de los profesores de nuestro centro	☐	☐	

13) El siguiente gráfico muestra la duración total (en horas) de 10 baterías de dos marcas diferentes (Batería marca A y Batería marca B).



Duración de las baterías en horas (Batería A arriba y Batería B debajo)

Observando el gráfico, si necesitaras una batería para uno de tus juegos, ¿cuál de las dos baterías elegirías? Explica tu razonamiento.

14) Los resultados de una competición de saltos de longitud fueron los siguientes:

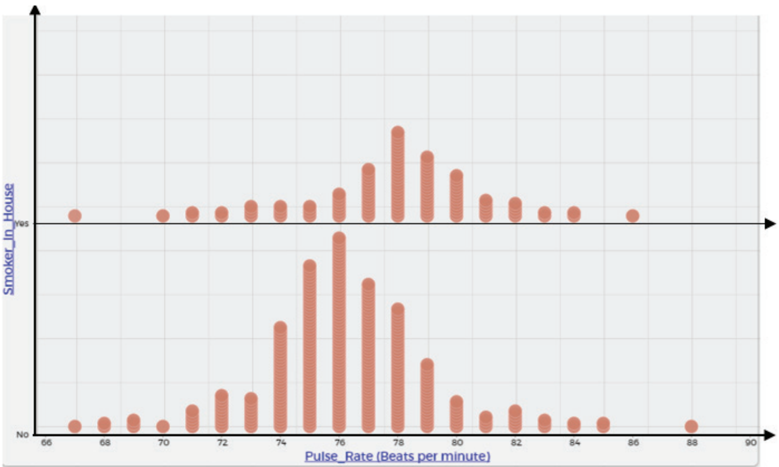
	Longitud mediana
Equipo A	3.6 m
Equipo B	4.8 m

Cada equipo tenía el mismo número de estudiantes. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera y por qué? Escoge solamente una opción y explica tu razonamiento.

A. Cada alumno del equipo B saltó más lejos que cualquier alumno del equipo A.
B. Después del salto de cada alumno del equipo A, ha habido un alumno del equipo B que saltó más lejos.
C. Como grupo, el equipo B saltó más lejos que el equipo A.
D. Algunos alumnos del equipo A han saltado más lejos que algunos alumnos del equipo B.

Explica aquí las razones de tu decisión:

I5) La frecuencia cardíaca es el número de veces que el corazón de una persona late en un minuto. Los gráficos siguientes muestran la frecuencia cardíaca de una muestra aleatoria de 120 personas que viven en una casa donde hay un fumador (gráfico de puntos superior) y de 316 personas que viven en una casa en la que no fuma nadie (gráfico de puntos inferior).



¿Qué grupo de personas tienden a tener una frecuencia cardíaca mayor? ¿O son las frecuencias en ambos grupos iguales? Explica cómo has tomado esta decisión.

ANEXO 2. Cuestionario de actitudes hacia la estadística con uso de tecnología

	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	De acuerdo	Muy de acuerdo
1. Disfruto aprendiendo estadística.				
2. La tecnología hace que el aprendizaje de la estadística sea más fácil.				
3. Me resulta útil e interesante estudiar estadística.				
4. Me gusta utilizar el ordenador para resolver problemas estadísticos (Excel, CODAP...).				
5. Cuando trato de resolver un problema estadístico me siento muy nervioso.				
6. Puedo crear gráficos estadísticos con el ordenador fácilmente (Excel, CODAP...).				
7-pre. Creo que durante las clases de estadística me sentiré estresado.				
7-post. Creo que durante las clases de estadística me siento estresado.				
8. Aprender estadística es fácil.				
9. La tecnología me ayuda a comprender mejor la estadística (Excel, CODAP...).				
10. La estadística me asusta.				
11. La estadística me provoca ansiedad.				
12-pre. Tengo miedo de la estadística ya que creo que es una de las asignaturas más difíciles.				
12-post. Tengo miedo de la estadística ya que ha sido una de las asignaturas más difíciles.				
13. Soy competente con el uso del ordenador.				
14-pre. Puedo aprender estadística fácilmente.				
14-post. He podido aprender estadística fácilmente.				
15. Comprendo la estadística mejor que la mayoría de los compañeros de mi clase.				
16. El uso de tecnología hace más interesante el aprendizaje de la estadística.				

 https://doi.org/10.24844/EM3502.09

La relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK: una oportunidad de investigación

The relationship between the Affective Domain and the MTSK model: an opportunity for research

Salvador Soto-Cerros,[1] María del Socorro García-González,[2]
María Isabel Pascual-Martín[3]

Resumen: La investigación en Educación Matemática ha evidenciado que el Dominio Afectivo, que abarca creencias, actitudes y emociones, ejerce una influencia significativa en el aprendizaje de las matemáticas. No obstante, aún se conoce poco acerca de cómo el Dominio Afectivo afecta la enseñanza del profesorado de matemáticas. Por tanto, el objetivo de este ensayo es reflexionar sobre la necesidad de investigar la relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK mediante una revisión documental de investigaciones que abordan ambos conceptos. Para ello, se ha empleado la metodología PRISMA. Los resultados obtenidos indican una desconexión entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK, lo que representa una oportunidad para explorar cómo los factores afectivos pueden afectar el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas, tanto directa como indirectamente. Esto es de gran importancia ya que podría llevar a la inclusión del afecto en los diversos modelos teóricos utilizados para describir el conocimiento del profesorado de matemáticas.

Palabras clave: *Dominio Afectivo, modelo MTSK, matemáticas, docentes.*

Fecha de recepción: 22 de julio de 2022. **Fecha de aceptación:** 17 de mayo de 2023.

[1] Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, ssoto@uagro.mx , orcid.org/0000-0001-5208-5614.

[2] Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, mgarcia@uagro.mx, orcid.org/0000-0001-7088-1075.

[3] Universidad de Huelva, isabel.pascual@ddcc.uhu.es, orcid.org/0000-0002-6429-2968.

Abstract: Research in Mathematics Education has shown that the Affective Domain, which encompasses beliefs, attitudes, and emotions, exerts a significant influence on mathematics learning. However, little is still known about how the Affective Domain affects mathematics teaching by teachers. Therefore, the aim of this essay is to reflect on the need to research the relationship between the Affective Domain and the MTSK model through a literature review of studies that address both concepts. The PRISMA methodology has been employed for this purpose. The results indicate a disconnect between the Affective Domain and the MTSK model, which represents an opportunity to explore how affective factors can impact teachers' specialized knowledge of mathematics, both directly and indirectly. This is of great importance as it could lead to the inclusion of affect in the various theoretical models used to describe teachers' mathematical knowledge.

Keywords: *Affective Domain, MTSK model, mathematics, teachers.*

INTRODUCCIÓN

En el campo de la Educación Matemática, el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, MTSK) ha sido objeto de investigación durante años, con el fin de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de esta asignatura. Sin embargo, el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, desde donde se generó el modelo MTSK, ha planteado un desafío: estudiar el dominio afectivo como parte del MTSK (Carrillo, 2017). Reconociendo la importancia del dominio afectivo en la comprensión profunda del profesor y su actividad docente, el presente escrito surge como una respuesta a este desafío y, se plantea el objetivo de explorar la relación entre el MTSK y el Dominio Afectivo a partir de investigaciones que tratan estas temáticas, ya sea de forma conjunta o separada.

En las últimas décadas, la formación de profesores ha sido un tema de gran interés para los investigadores en Educación Matemática (González y Eudave, 2018). A partir de los trabajos de McLeod (1989; 1992) sobre el Dominio Afectivo y los de Shulman (1986;1987) sobre el conocimiento del profesor, se han generado numerosas investigaciones en una variedad de temas, debido al papel que desempeña el profesor de matemáticas en los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta asignatura y, al reconocimiento de la importancia de los factores afectivos. Sin embargo, a pesar de que se han realizado varias investigaciones que abordan el papel del Dominio Afectivo en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, éstas se han desarrollado de forma paralela o separada (Pascual *et al.*, 2019; Yang *et al.*, 2020).

Desde el Dominio Afectivo, los estudios sobre las creencias de los profesores de matemáticas se han centrado principalmente en la asignatura, su enseñanza y su aprendizaje (Schoenfeld, 2006; Lebrija *et al.*, 2010; Reyes-Rodríguez *et al.*, 2017; Safrudiannur y Rott, 2019; Xie y Cai, 2021). Estas investigaciones han mostrado que las creencias de los docentes influyen en sus decisiones, incluyendo su forma de enseñar la resolución de problemas y en otras acciones didácticas dentro del aula.

Por otro lado, en los estudios sobre las emociones de los profesores de matemáticas (García-González y Pascual, 2017; García-González y Martínez-Sierra, 2018; Arellano *et al.*, 2018) se reportan experiencias negativas como la congoja, la decepción, el miedo y el autorreproche, que pueden ser desencadenadas por diversas situaciones, como la falta de conocimiento matemático o el bajo rendimiento de los estudiantes. Estas emociones negativas pueden llevar a la desmotivación o al desinterés en la enseñanza. Por otro lado, las emociones positivas, como el orgullo, la satisfacción o el aprecio, pueden predisponer al profesor para profundizar en el contenido matemático y para idear y emplear nuevas estrategias de enseñanza, lo que a su vez podría potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto a las actitudes hacia las matemáticas, varios estudios se han enfocado en investigar la relación entre actitudes positivas y el rendimiento académico, evaluar las actitudes hacia áreas específicas de las matemáticas, o definir el concepto de actitud en sí mismo (Di Martino y Zan, 2010; Gómez-Chacón, 2010). Por ejemplo, Vásquez *et al.* (2019) examinaron las actitudes hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza en un grupo de futuras profesoras de Educación Infantil. Sus resultados indican que las actitudes hacia la estadística y su enseñanza, son ligeramente más favorables que las actitudes hacia la probabilidad. En otras palabras, las actitudes de las profesoras influyen en su enseñanza, mostrando mayor interés en el estudio y la enseñanza de la estadística que en la probabilidad.

Según algunos investigadores, los profesores de matemáticas tienden a moldear su práctica en el aula en función de sus propias creencias, actitudes y emociones (Casis *et al.*, 2017; García-González *et al.*, 2019). Grootenboer y Marshman (2016), sostienen que los docentes deben ser conscientes de que durante las clases están transmitiendo creencias matemáticas a sus estudiantes, las cuales influirán en su aprendizaje futuro. Por lo tanto, Casis *et al.* (2017) destacan la importancia de que los profesores exhiban actitudes y creencias positivas para fomentar estas mismas en los estudiantes.

Todo lo anterior indica que, para enseñar matemáticas, también es necesario comprender cuestiones afectivas. Grootenboer y Marshman (2016) argumentan que, a pesar del gran interés en la influencia del Dominio Afectivo en el aprendizaje de las matemáticas, todavía existe falta de claridad sobre su impacto. Esta falta de claridad se acentúa debido a la escasez de investigaciones que expliquen cómo los aspectos afectivos influyen en el conocimiento del profesor de matemáticas.

El estudio del conocimiento del profesor iniciado en la época de los ochenta por Shulman, se ha interesado en describir el tipo de conocimiento que tiene o debería tener el profesor para desempeñar de forma efectiva su labor docente. Desde entonces se han desarrollado diferentes tipologías de conocimiento o saberes docentes que han pasado de una perspectiva genérica a una especializada (Moriel, 2021). En este sentido, los trabajos de Shulman (1986; 1987) han servido de base para el desarrollo de una gran variedad de modelos o teorías centrados en comprender el conocimiento del profesor de matemáticas, por ejemplo, el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) de Ball *et al.* (2008); el modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de Godino *et al.* (2017); y el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) (Carrillo *et al.*, 2014 y Carrillo *et al.*, 2018).

De los modelos previamente mencionados sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, en este ensayo se centra la atención en el MTSK, por dos razones. Primero, según Carreño *et al.* (2021), existe la necesidad de abordar la relación entre el Dominio Afectivo del profesor y su MTSK, pero se ha avanzado poco debido a la necesidad de establecer categorías y realizar estudios empíricos. Y segundo, los autores forman parte de la red iberoamericana MTSK, lo que les brinda un conocimiento más profundo sobre este modelo. En este sentido, el presente ensayo expone una reflexión basada en una investigación documental sobre la importancia de estudiar cómo los factores afectivos influyen en el MTSK.

Este ensayo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se dedican dos secciones a hablar por separado sobre el Dominio Afectivo y el MTSK, donde se detallan los principales aspectos de cada uno. A continuación, se presenta el estudio documental que se realizó para analizar la relación entre los constructos del Dominio Afectivo y el modelo MTSK, el cual se desarrolló mediante la metodología PRISMA. Finalmente, se presentan las reflexiones de los autores sobre la importancia de estudiar la relación entre ambos referentes y se destacan las implicaciones que se pueden derivar de ello.

El Dominio Afectivo

McLeod (1989) define al Dominio Afectivo como "un extenso rango de sentimientos y estados de ánimo, que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición" (p. 245, traducción propia). Dicho autor reconoce tres descriptores básicos (ver figura 1), creencias, actitudes y emociones, que caracterizó en orden creciente de estabilidad en el tiempo y en el grado de cognición; así, las emociones pueden ser fugaces y altamente afectivas, mientras que las creencias son estables y cognitivas (McLeod, 1992).

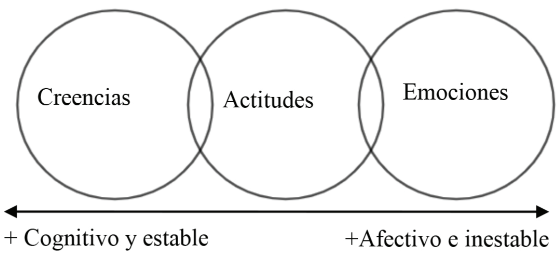


Figura 1. Componentes del Dominio Afectivo. Fuente: adaptado de Pascual *et al.* (2020).

En este ensayo cuando hablamos de Dominio Afectivo nos referiremos a estos tres constructos. A pesar de que con el tiempo se han agregado más constructos como la identidad, la motivación y la autoeficacia (Lomas *et al*., 2012), la elección de la definición propuesta por McLeod (1989) se debe a que es la más utilizada en Educación Matemática.

Es importante destacar que en el ensayo se utiliza una caracterización de los constructos actitud, creencia y emoción que puede diferir de la presentada por los autores consultados en la investigación documental. Desde nuestra perspectiva, consideramos que las emociones están influenciadas por la estructura, el contenido y la organización de las representaciones cognitivas, así como por los procesos que actúan sobre ellas, tal como lo han señalado Ortony *et al.* (1996). De manera similar, las creencias y actitudes también están determinadas por factores cognitivos. Esta caracterización permite evitar contradicciones conceptuales, ya que no existe un consenso en Educación Matemática sobre la definición precisa de estos constructos.

Desde la conceptualización de McLeod, hasta la actualidad, se han realizado numerosos estudios sobre los tres descriptores básicos. Algunos de ellos, han destacado una relación entre los tres. Por ejemplo, se ha demostrado que las experiencias emocionales negativas repetidas de los estudiantes pueden dar lugar a actitudes de rechazo hacia las matemáticas y la creencia de que son difíciles (Gil *et al.*, 2005; Grootenboer y Marshman, 2016; Reid y Amanat, 2020). En vista de estos resultados, consideramos que los profesores de matemáticas, como expertos en la disciplina, no solo deben dominar los aspectos conceptuales y procedimentales, sino también los aspectos afectivos, para poder reconocer y gestionar sus propias emociones y actitudes, así como las de sus estudiantes.

En conclusión, es fundamental que los profesores comprendan la relación entre las emociones, las creencias y las actitudes hacia las matemáticas, ya que esto puede tener un impacto significativo en el rendimiento académico y la motivación de los estudiantes. Por lo tanto, es necesario que el conocimiento del profesor de matemáticas se vincule con el Dominio Afectivo.

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

El modelo MTSK, desarrollado por Carrillo *et al* (2014; 2018), es una herramienta teórica y analítica que tiene como objetivo identificar y comprender el conocimiento específico del profesor de matemáticas de manera sistemática y organizada para su análisis. Este modelo permite una comprensión profunda de la naturaleza del conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas. Está conformado por dos dominios de conocimiento, el Conocimiento Matemático (Mathematical Knowledge – MK); el Conocimiento Didáctico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge - PCK); y por el dominio de las creencias, que se consideran como núcleo central del modelo (ver figura 2).

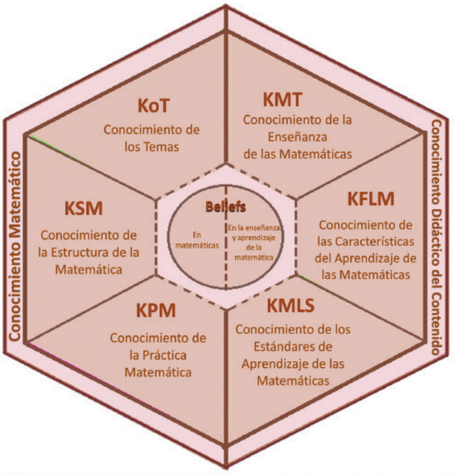


Figura 2. Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Fuente: tomado de Contreras-González*et al* (2017).

El primer dominio, MK, hace alusión al conocimiento que tiene el profesor sobre las matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar, es decir, se refiere al conocimiento del profesor sobre la propia disciplina que enseña, y se divide en los siguientes subdominios:

- Conocimiento de los Temas (KoT), hace referencia al conocimiento de los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada.
- Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), es el conocimiento de las relaciones que el profesor hace entre distintos contenidos, ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Se trata específicamente de conexiones entre temas matemáticos.
- Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), este subdominio destaca la importancia de que el profesor no solo conozca resultados matemáticos establecidos, sino también las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. Se trata de saber cómo se explora y se genera conocimiento en matemáticas, cómo se establecen relaciones, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y se generaliza, qué papel tienen las convenciones matemáticas, y qué características tienen algunos de los elementos con los que se hacen matemáticas.

El segundo dominio, PCK, se refiere a los conocimientos de aspectos relacionados con el contenido como objeto de enseñanza-aprendizaje; este considera los siguientes subdominios:

- Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), engloba los conocimientos sobre las características del contenido matemático como objeto de aprendizaje.
- Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), engloba los conocimientos sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza.
- Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), considera el conocimiento que un profesor tiene acerca del currículo, los aprendizajes esperados, el nivel conceptual y procedimental que se espera que un estudiante aprenda en un determinado momento escolar, y la secuencia de temas del currículo.

El tercer dominio es el de las creencias (beliefs), y se distingue entre las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas y las creencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como subdominios relevantes. Cabe destacar que, en este modelo, las creencias se definen como las "verdades" personales que el profesorado tiene sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Ponte, 1994).

Dentro de las creencias acerca de la naturaleza de la matemática, se contemplan los siguientes tipos (Ernest, 1989; Carrillo y Contreras, 1995):

- Platónica. Considera la visión de las matemáticas como un cuerpo de conocimiento acabado pero unificado, como producto estático e inmutable que se descubre, no se crea, formado por estructuras y verdades lógicas interconectadas.
- Instrumentalista. Considera a la matemática como un conjunto útil de hechos, reglas, recursos, resultados, sin una vinculación teórica (conceptual) ni práctica determinada.
- Resolución de problemas. La matemática se concibe como un conocimiento sometido a una revisión constante que depende del contexto social, cultural y científico, lo que hace que la veracidad de sus resultados y procedimientos sea relativa.

En cuanto a las creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se consideran las siguientes (Aguilar-González *et al.*, 2018):

- Tradicional. Se fomenta la ejercitación repetitiva; el maestro da las pautas; interesan los conceptos y reglas; el proceso de aprendizaje es deductivo (regla-aplicación); y el aprendizaje es un proceso individual.
- Tecnológica. Se fomenta la ejercitación reproductiva; el maestro da las pautas poniendo énfasis en que los alumnos comprendan; interesan los conceptos y reglas, procedimientos locales y lógica de la asignatura; procesos de aprendizaje inductivos simulados (por el maestro) y deductivos; el aprendizaje es un proceso individual.
- Espontaneísta. El maestro propone las actividades, promoviendo la participación de los alumnos; interesan actitudes y procedimientos generales; proceso de aprendizaje inductivo; el aprendizaje es un proceso social.
- Investigativa. El maestro propone investigaciones, apoya la reflexión y el trabajo autónomo del alumno; interesan conceptos, procedimientos y actitudes; el proceso de aprendizaje es inductivo-deductivo; el aprendizaje es un proceso social e individual.

Como se ha descrito, el modelo MTSK es una herramienta analítica útil para identificar el conocimiento del profesor de matemáticas, y aunque aborda aspectos cognitivos, técnicos y algunos elementos del dominio afectivo, como las creencias, se hace necesario ampliarlo incluyendo más descriptores como las emociones y las actitudes. De esta manera, se podrá tener una comprensión más completa y holística del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, lo que permitiría promover un enfoque más integral y equilibrado en la formación y el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas.

METODOLOGÍA

La búsqueda y selección de los documentos se centró en aquellas investigaciones que tuvieran como objetivo o dieran cuenta de la relación entre uno o los tres constructos del Dominio Afectivo con alguno de los subdominios del MTSK. Para ello, se empleó la metodología denominada Elementos de Informe Preferidos para Revisiones Sistemáticas y Metanálisis (Preferred Reporting Items for Systematic reviews and Meta-Analyses, PRISMA). Esta metodología consiste en realizar una revisión sistemática de la literatura para identificar, seleccionar y evaluar las fortalezas y debilidades de la investigación sobre un tema determinado (Liberati *et al.*, 2009).

Se optó por esta metodología ya que, de acuerdo con Page *et al.* (2021), las revisiones sistemáticas son útiles para proporcionar una síntesis del estado del conocimiento en un área determinada. En nuestro caso, nos enfocamos en lo referente a la relación DA-MTSK. La metodología PRISMA está conformada por 13 ítems. Sin embargo, en este escrito solo se emplearon 3: 1) las estrategias de búsqueda, que corresponden a la elección de las bases de datos y palabras clave, 2) los criterios de elegibilidad y exclusión, en los cuales se establecen los lineamientos para seleccionar o excluir los documentos encontrados, y 3) los métodos para presentar y sintetizar la información, donde se describen los instrumentos de análisis de datos, así como la síntesis de los resultados. Enseguida se describen.

Estrategia de búsqueda de información

La búsqueda de información se llevó a cabo desde el año 2014, fecha de creación del modelo MTSK, hasta mediados de 2022. Se consultaron diversas bases de datos, como las actas del Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas de la red MTSK, Google Scholar, Researchgate, Eric, SpringerLink, Scopus y Latindex. La inclusión de las actas del congreso de la red MTSK fue esencial, ya que en ellas se encuentran los hallazgos más recientes del modelo, además de que se trata de documentos arbitrados.

Para el estudio, se emplearon las siguientes combinaciones de palabras clave tanto en español como en inglés: dominio afectivo, conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK; creencias, conocimiento especializado, profesor, matemáticas, MTSK; actitudes, conocimiento especializado, profesor, matemáticas, MTSK; y emociones, conocimiento especializado, profesor, matemáticas, MTSK. Esto permitió identificar investigaciones que abordan la relación entre uno o más de estos constructos del DA y alguno de los subdominios del MTSK.

Criterios de elegibilidad y exclusión

Siguiendo las pautas de PRISMA para la búsqueda sistemática de la información, se consideraron los criterios de inclusión y exclusión que se muestran en la tabla 1. Aclaramos que la decisión de excluir las tesis se basa en la necesidad de cumplir con los criterios de selección establecidos por el proceso de arbitraje.

Aunque es cierto que las tesis son revisadas por expertos, la selección de los trabajos para esta revisión se limitó a artículos y memorias de congresos que hayan pasado por un riguroso proceso de revisión por pares.

Tabla 1. Criterios de inclusión y exclusión de los documentos de información.

Criterios de inclusión	Criterios de exclusión
1. Estudios que tienen como objetivo o se centran en la relación entre DA y MTSK.	1. Documentos duplicados.
2. Estudios publicados en inglés y español.	2. Tesis.
3. Artículos, capítulos de libro y actas de congresos en educación matemática.	3. Estudios con poca o nula relación.

La búsqueda en las bases de datos arrojó un total de 23 documentos, de los cuales 8 fueron excluidos porque estaban duplicados. Posteriormente, 2 trabajos fueron excluidos por ser tesis, los 13 trabajos restantes fueron analizados a profundidad y se encontró que 7 de ellos tenían poca o nula relación con el tema de interés por lo cual fueron excluidos, quedando de este modo un total de 6 documentos para el análisis (ver figura 3).

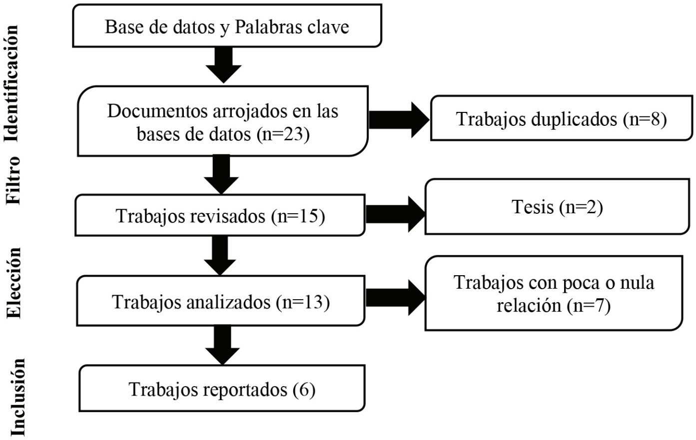


Figura 3. Proceso de búsqueda y selección de documentos de información.

Métodos para presentar y sintetizar la información

Para la organización y análisis de los datos, se utilizaron tablas de doble entrada para registrar las investigaciones que se enfocaron en establecer relaciones entre el dominio afectivo y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En la tabla 2 se presentan las siguientes características de cada investigación: autor y año de publicación, objetivos de investigación, foco de estudio y método de investigación.

Tabla 2. Investigaciones centradas en la relación entre el dominio afectivo y el MTSK.

Autor y año de publicación	Objetivo de investigación	Foco de estudio	Métodos de investigación
Flores-Medrano y Carrillo (2014)	Mostrar las conexiones entre las concepciones de un docente sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas reflejadas en la planificación diseñada por un profesor de matemáticas de nivel secundario y el conocimiento especializado desplegado tanto en la etapa de diseño como en las reflexiones del docente después de la lección.	Profesor de secundaria	Cualitativo Estudio de caso
Gómez-Chacón *et al.* (2017)	Reflexionar sobre las relaciones entre el núcleo central del modelo MTSK y los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.	Profesor de nivel medio superior	Cualitativo Estudio de caso
Aguilar-González *et al.* (2018)	Analizar cómo se establecen las relaciones entre los distintos subdominios con las concepciones, ejemplificándolas a partir de la observación de una sesión de aula.	Profesora de primaria	Cualitativo Estudio de caso
Pascual *et al.* (2019)	Identificar, a través de un análisis documental, posibles puntos de conexión entre los dominios de conocimiento matemático y didáctico con los distintos componentes del dominio afectivo.	Documentos	Cualitativo Análisis documental
García-González *et al.* (2019)	Estudiar la relación entre el conocimiento emocional del profesor de matemáticas y su conocimiento especializado.	Profesor de secundaria	Estudio de caso instrumental
Pascual *et al.* (2020)	Discutir y justificar las influencias entre los planos, afectivo y cognitivo, en el conocimiento especializado del profesor	Documentos	Cualitativo Análisis documental

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aunque se encontraron algunas relaciones entre los constructos del DA y el MTSK en los documentos revisados, estas fueron muy limitadas. De las seis investigaciones revisadas, dos fueron de tipo documental y las demás empíricas (ver tabla 2). A pesar de que las investigaciones documentales exploraron la relación entre los tres descriptores del dominio afectivo y el MTSK, las investigaciones empíricas se enfocaron principalmente en estudiar la relación entre un solo descriptor del dominio afectivo y el MTSK.

Cinco investigaciones examinaron la relación entre las creencias y el MTSK, de las cuales dos fueron estudios documentales y las otras tres, estudios empíricos. Por otro lado, se encontraron solamente dos investigaciones documentales que abordan la relación entre las actitudes y el MTSK. Y se hallaron cuatro investigaciones que analizan la relación entre las emociones y el MTSK, dos de ellas de forma empírica y dos de forma documental.

En cuanto a las creencias, Escudero-Domínguez *et al*. (2016) afirman que éstas forman parte del modelo MTSK desde su creación debido a la estrecha relación que existe entre el conocimiento del profesor y sus creencias, las cuales influyen directamente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, razón por la cual se consideran como el núcleo central del modelo. Sin embargo, se han realizado pocas investigaciones desde el modelo MTSK cuyo objetivo sea el estudio de las creencias en relación con el MK o el PCK. La mayoría de los estudios de la red MTSK se han enfocado en los dominios MK y PCK y sus subdominios, pero no se han centrado específicamente en el dominio de las creencias y su relación con otros dominios o subdominios MTSK.

Como mencionamos anteriormente, se han llevado a cabo algunas investigaciones desde el modelo MTSK que muestran relaciones empíricas o hipotéticas entre los constructos de creencias, actitudes y emociones con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Sin embargo, la evidencia solo ha señalado relaciones empíricas en el caso de las creencias y las emociones. A continuación, presentamos cada relación identificada.

Relaciones empíricas

Flores-Medrano y Carrillo (2014) evidencian la influencia de las creencias de un profesor de secundaria en su enseñanza. Según los autores, el docente manifestaba una creencia tecnológica acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es decir, el profesor adoptaba un rol técnico al enseñar, organizando las actividades de enseñanza y su gestión en clase. Esta creencia condicionaba su planificación, centrándose en el diseño de actividades que plantea a sus estudiantes [KMT].

Por otro lado, Aguilar-González *et al*. (2018) exponen el caso de una profesora de primaria con una creencia investigativa acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En su práctica docente, la profesora problematizaba los contenidos matemáticos, motivaba a sus estudiantes y reflexionaba con ellos. Por ejemplo, al enseñar el tema de polígonos, iniciaba la clase centrando la atención en las características de un polígono [KoT], y por medio de cuestionamientos guiaba a sus estudiantes para llegar a la definición de polígono.

García-González *et al*. (2019) estudiaron la relación entre las emociones del profesor de matemáticas y su MTSK a través de un estudio de caso con un docente novel de secundaria. Encontraron una relación recíproca entre la emoción y el MTSK del profesor, donde las emociones negativas del docente eran desencadenadas por su escaso KoT. Este escaso KoT condicionaba su KMT y su estado de ánimo al enseñar. Por ejemplo, si desconocía algún tema, experimentaba congoja; en cambio, si tenía conocimiento del tema, experimentaba satisfacción. En ambos casos, sus emociones se reflejaban en su enseñanza, mostrándose disponible para responder preguntas cuando conocía los temas y, cuando no los conocía, se mostraba enojado ante los estudiantes para evitar preguntas.

La evidencia empírica de los estudios descritos demuestra que existe una relación significativa entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK, lo que destaca la relevancia de incluir las emociones y la actitud junto con el subdominio de creencias. Asimismo, estos hallazgos ponen de manifiesto la necesidad de extender la investigación empírica para profundizar en la comprensión de la interacción entre ambos referentes.

Relaciones hipotéticas

Se comenzó a explorar la relación entre los tres componentes del Dominio Afectivo y el MTSK en estudios documentales recientes llevados a cabo por Pascual *et al.* (2019; 2020), en los cuales se proponen hipótesis sobre posibles relaciones entre el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) y el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Relaciones hipotéticas entre DA y MTSK (KMT y KFLM).

Descriptores	KMT	KFLM
Creencias	Sobre la actividad del aula: iniciar con definiciones, ejemplificar y repetir ejercicios. Sobre la interacción con los estudiantes: Los estudiantes deben estar atentos cuando se explica. Sobre el uso de materiales manipulativos: Los juegos y materiales manipulativos despiertan el interés por aprender. Sobre el cumplimiento del currículum: vale más que se comprendan los temas a que se cumpla el temario del currículum.	Cómo el profesor entiende que se produce y se manifiesta el aprendizaje. Cómo se realiza la transmisión del conocimiento desde el punto de vista del profesor. Cómo se concibe la interacción profesor-estudiante en la construcción de conocimiento matemático.
Actitudes	Interés por conocer técnicas que detecten ansiedad matemática e inseguridad en los alumnos y por conocer teorías de enseñanza que den respuesta. Gusto por proponer actividades matemáticas que aproximen las matemáticas al alumno evitando rechazo hacia ellas.	Disposición al tratamiento del error como vehículo de construcción de una matemática dinámica. Inclinación a construir el conocimiento desde las relaciones que el alumno establece.
Emociones	Alegría, satisfacción, orgullo, al tener conocimiento de recursos y materiales virtuales, de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Tristeza, decepción, miedo, auto-reproche, al no tener conocimiento de recursos y materiales virtuales, y no tener conocimiento de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.	Respuesta emocional ante la presencia de eventos de contingencia (Alegría/miedo/inseguridad).

Fuente: Pascual *et al.* (2019; 2020).

En el ámbito de las creencias, se consideran aquellas relacionadas con la interacción del profesor con los estudiantes, como la importancia de que los estudiantes presten atención durante las explicaciones en clase, y las relacionadas con el cumplimiento del currículum, bajo la creencia de que es más relevante la comprensión de los temas que la mera finalización del programa de estudios. En cuanto a las actitudes, se menciona la disposición del docente a tratar el error como una oportunidad de aprendizaje y su gusto por las actividades matemáticas contextualizadas. Respecto a las emociones, se consideran las positivas, como la alegría, la satisfacción y el orgullo, cuando el docente posee conocimiento de recursos o estrategias didácticas, y las emociones negativas, como la tristeza o el miedo, al no contar con este tipo de conocimientos.

Las relaciones hipotéticas propuestas en los estudios documentales pueden ser útiles para orientar la investigación empírica sobre la relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK. Al establecer estas relaciones hipotéticas, se pueden formular hipótesis que posteriormente sean verificadas mediante estudios empíricos. Además, estas relaciones hipotéticas pueden ayudar a guiar la selección de variables relevantes y la elaboración de instrumentos de medición para evaluar tanto el Dominio Afectivo como los subdominios del MTSK.

REFLEXIONES FINALES

A pesar de que se han realizado diversos estudios para explorar las relaciones entre los descriptores básicos del Dominio Afectivo y los subdominios del modelo MTSK, hasta el momento se ha prestado mayor atención a las emociones y creencias de los profesores de matemáticas de manera separada. Por lo tanto, un estudio que examine los tres descriptores básicos de manera integrada podría contribuir a comprender cómo se relacionan con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Por ejemplo, cuando los profesores experimentan emociones negativas, pueden desarrollar actitudes negativas hacia las matemáticas y su enseñanza. Por otro lado, cuando experimentan emociones positivas, pueden mostrarse más animados e interesados en el aprendizaje de sus estudiantes, profundizando así en los subdominios KoT, KFLM y KMT, lo que les permitiría desarrollar actitudes positivas hacia las matemáticas y su enseñanza y, diseñar estrategias de enseñanza innovadoras e interesantes para sus estudiantes.

Aunque los estudios del Dominio Afectivo y el modelo MTSK por separado ofrecen información valiosa, la integración de estos aspectos puede mejorar el potencial explicativo del MTSK sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Este enfoque permitiría identificar y explicar las causas o factores que influyen en la toma de decisiones y acciones del profesor de matemáticas en el aula, así como intervenir para modificar creencias y actitudes negativas y regular emociones negativas del docente para crear un ambiente de aula favorable.

Consideramos que, para poder analizar sistemáticamente las relaciones entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK, es necesario desarrollar un aparato teórico-metodológico que permita su articulación. Como lo sugirió el grupo de Afecto del CERME 12, se requiere una mayor atención en la teorización del afecto en el campo de la Educación Matemática para poder vincularlo adecuadamente con la cognición (Schukajlow *et al.*, 2022). En este sentido, la relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK representa una oportunidad de investigación valiosa que, puede contribuir significativamente a avanzar en este campo de estudio.

Finalmente expresamos que la relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK puede tener varias implicaciones importantes. Por un lado, comprender cómo las creencias, actitudes y emociones de los profesores influyen en su conocimiento especializado puede ayudar a mejorar la formación y capacitación docente. Además, una mayor atención a los factores afectivos en la enseñanza de las matemáticas, puede mejorar la motivación y el interés de los estudiantes por esta disciplina, lo que a su vez puede influir positivamente en su aprendizaje y rendimiento académico. Por otro lado, la comprensión de la relación entre el Dominio Afectivo y el modelo MTSK puede contribuir a la teorización del afecto en el campo de la Educación Matemática y a su inclusión en los diversos modelos teóricos que se utilizan para describir y explicar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, invitamos a los lectores a asumir este reto.

AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestra gratitud a la editora de sección y a los revisores por su valiosa contribución en la mejora de nuestro ensayo.

REFERENCIAS

Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo-Yáñez, J. y Rodríguez-Muñiz, J. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *Revista de Investigación en didáctica de la Matemática: PNA, 13*(1), 41–61. https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944

Arellano, Y., Hernández, A., Nava, C., y Martínez-Sierra, G. (2018). Explorando las emociones diarias de profesores de matemáticas en el aula. Un estudio de caso. En C. Dolores-Flores, G. Martínez-Sierra, M. García-González, J. Juárez-López y J. Ramírez-Cruz (Eds.), *Investigaciones en Dominio Afectivo en matemática educativa* (pp. 395-314). Ediciones Eón; Universidad Autónoma de Guerrero.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Carreño, E., Escudero-Avila, D., y Estrella, S. (2021). Desafíos y perspectivas de investigación con/del Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. En J., Moriel-Junior (Ed.) *Anais do V congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 11–18). Congresseme.

Carrillo, J. (2017). Idiosincrasia del modelo MTSK, investigaciones realizadas y utilidades. Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. *Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 7-10).

Carrillo, J. y Contreras, L. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática, 7*(3), 79-92.

Carrillo, J., Aguilar, A., Contreras, L, Climent, N., Carmona, E., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., Flores, P., Huitrado, J., Montes, M., Muñoz-Catalán, M., Rojas, N., Sosa, L., Vasco, D., y Zakaryan, D. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, R., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Casis, M., Rico, N. y Castro, E. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *Revista de Investigación en didáctica de la Matemática: PNA, 11*(3), 181-203. https://doi.org/10.30827/pna.v11i3.6073

Contreras-González, L., Montes, M., Climent, N., y Carrillo, J. (2017). Introducción al modelo MTSK: origen e investigaciones realizadas. *Revista de análisis matemático-didáctico para profesores: For-Mate*, 3, 1-15. https://n9.cl/vx8qs

Di Martino, P., y Zan, R. (2010). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 27–48. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of Education for Teaching, 15*, 13–34.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Corrêa, D. y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 69-86). Huelva, España. http://hdl.handle.net/10272/12509

Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialized knowledge through her practice. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 3, pp. 81-88). PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599801.pdf

García-González, M. y Pascual, M. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *8*(15), 133-148. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15

García-González, M., Pascual, M., Carrillo, J., y Martínez-Sierra, G. (2019). El modelo de conocimiento especializado para la enseñanza y las emociones del profesor de matemáticas. En H. Lidia, I. Borja, J. Slisko y J. Juárez (Eds.). *Aportes a la educación matemática basado en la investigación* (99-119). BUAP.

García-González, M., y Martínez-Sierra, G., (2018). Un estudio exploratorio sobre las emociones de profesores de matemáticas. En C. Dolores-Flores, G. Martínez-Sierra, M. García-González, J. Juárez-López y J. Ramírez-Cruz (Eds.), *Investigaciones en Dominio Afectivo en matemática educativa* (pp. 283-294). Ediciones Eón; Universidad Autónoma de Guerrero.

Gil, N., Blanco, L., y Guerrero, E. (2005). El Dominio Afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *1*(2), 15-32.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*, 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gómez-Chacón, M, García-González, M., Carmona, K. y Fernández-Gago, J. (2017). El Dominio Afectivo en el MTSK. *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 26-28). Huelva, España. https://onx.la/d03d1

Gómez-Chacón, M. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(2), 227-244. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n2.197

Gonzalez, J. y Eudave, D. (2018). Modelos de análisis del conocimiento matemático y didáctico para la enseñanza de los profesores. UNIÓN – *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. *14*(54), 25-45.

Grootenboer, P., y Marshman, M. (2016). The affective domain, mathematics, and mathematics education. In P. Grootenboer and M. Marshman (Ed.). *Mathematics, Affect and Learning. Middle school students' beliefs and attitudes about mathematics education* (13-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-679-9

Lebrija, A., Flores, R., y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática*, *22*(1), 31-55.

Liberati, A., Altman, D., Tetzlaff, J., Mulrow, C., Gøtzsche, P., Ioannidis, J., Clarke, M., Devereaux, P., Kleijnen, J., y Moher, D. (2009). The PRISMA statement for reporting systematic reviews and meta-analyses of studies that evaluate health care interventions: explanation and elaboration. *Journal of Clinical Epidemiology*, *62*(10), 1-34. https://doi.org/10.1136/bmj.b2700

Lomas, G., Grootenboer, P., Attard, C. (2012). The affective domain and mathematics education. En B., Perry, T., Lowrie, T., Logan, A., MacDonald, y J., Greenlees (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australasia 2008–2011*. SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-970-1_3

Mcleod, D. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. In D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds*.), Affect and mathematical problem solving: A new perspective* (pp. 245-258). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. Grouws (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). McMillan.

Moriel, J. (2021). Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) in the Web of Science until 2020. *ZeTeTiké*, *29*, 1-18. https://doi.org/10.20396/zet.v29i00.8660030

Ortony, A., Clore, G. and Collins, A. (1996). *La estructura cognitiva de las emociones* (J. Martínez, Trad., primera edición). Editorial siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).

Page, M., Moher, D., Bossuyt, P. M., Boutron, I., Hoffmann, T. C., Mulrow, C. D., ... y McKenzie, J. E. (2021). PRISMA 2020 explanation and elaboration: Updated guidance and exemplars for reporting systematic reviews. *BJM*. https://doi.org/10.1136/bmj.n71

Pascual, M., Fernández-Gago, J., García, M., Marbán, J., y Maroto, A. (2020). El Dominio Afectivo y MTSK. *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 32-40). Huelva, España. http://www.uhu.es/publicaciones/?q=libros&code=1215

Pascual, M., Marbán, J., Maroto, A., Fernández-Gago, J. y García M. (2019). Apuntando influencias del Dominio Afectivo en el MTSK. Una ejemplificación con KMT. *IV Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 167-174). Huelva, España. http://www.uhu.es/publicaciones/?q=libros&code=1215

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers 'professional knowledge. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol.* 1 (pp. 194–210). Lisboa, Portugal: PME.

Reid, N., y Amanat, A. (2020). *Making Sense of Learning. A Research-Based Approach*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53677-0

Reyes-Rodríguez, A., Rondero-Guerrero, C., Acosta-Hernández, J., Campos-Nava, M. y Torres-Rodríguez, A. (2017). Reduccionismo didáctico y creencias de profesores acerca del teorema de Pitágoras. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(59), 968-983. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a06

Safrudiannur y Rott, B. (2020). Teachers' beliefs and how they correlate with teachers' practices of problem solving. En M. Meyer, B. Rott, I. Schwank., y H. Struve (Eds.). *Measuring Teachers' Beliefs Quantitatively. Criticizing the Use of Likert Scale and Offering a New Approach* (pp. 39-48). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-30023-4_3

Schoenfeld, A. (2006). Problem solving from cradle to grave. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *11*, 41-73. https://n9.cl/a3mn1

Schukajlow, S., Andrá, C., Gómez-Chacón, I. M., Haser, Ç., Liljedahl, P., y Viitala, H. (2022). Introduction to the work of TWG08: Affect and the teaching and learning of mathematics. review. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 1299–1302). ERME; Free University of Bozen-Bolzano. https://hal.science/hal-03808485/document

Shulman, L. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.2307/1175860

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-21. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Vásquez, C., Alvarado, H., y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. *Educación Matemática, 31*(3), 177-202. https://doi.org/10.24844/em3103.07

Xie, S., y Cia, J. (2021) Teachers' beliefs about mathematics, learning, teaching, students, and teachers: Perspectives from chinese high school in-service mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *19*, 747–769. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10074-w

Yang, X., Kaiser, G., König, J. y Blömeke, S. (2020). Relationship between pre-service mathematics teachers' knowledge, beliefs and instructional practices in China. ZDM –*Mathematics Education. 52*, 281–294. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01145-x

Autor de correspondencia

María del Socorro García-González

Dirección: Universidad Autónoma de Guerrero,
mgarcia@uagro.mx.
Colonia Haciendita II, Código Postal 39086, Chilpancingo de los Bravo, México

 https://doi.org/10.24844/EM3502.10

Intervenção Colaborativa nas Aulas de Matemática: O processo de ensino e aprendizagem de um aluno com autismo

Collaborative Intervention in Mathematics Classes: The teaching and learning process of a student with autism

Erica Daiane Ferreira Camargo,[1]
Rosana Carla do Nascimento Givigi[2]

Resumo: O ensino e a aprendizagem da matemática relacionam-se a operações cognitivas específicas, que são um desafio no contexto da educação inclusiva. Este estudo objetivou analisar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática de um aluno com autismo, a partir da intervenção colaborativa. Trata-se de uma pesquisa qualitativa que faz uso do método microgenético e da pesquisa-ação colaborativa-crítica. Foi realizada na rede regular de ensino e o aluno com autismo foi acompanhado semanalmente durante doze meses. Na coleta de dados, utilizou-se a observação participante, o trabalho colaborativo e o diário de campo para o registro. Os resultados apontam que com estratégias diferenciadas e mediação qualificada, independentemente do diagnóstico de autismo, o aluno pode construir estruturas novas, reorganizando o que já havia aprendido anteriormente; aprender conceitos matemático e desenvolver as funções mentais superiores. Por fim, a partir do trabalho colaborativo em sala de aula, foi possível elaborar um planejamento adequado para o aluno, com adequação de estratégias e metodologias, corroborando com sua inclusão escolar.

Palavras-chave: Matemática. *Educação Inclusiva. Transtorno do Espectro Autista. Pesquisa-Ação.*

Fecha de recepción: 23 de enero de 2021. **Fecha de aceptación:** 15 de mayo de 2023.

[1] Universidade Federal de Sergipe (UFS), Grupo de Estudo e Pesquisa em Linguagem e Comunicação Alternativa, ericaadfc@gmail.com, orcid.org/0000-0003-0329-5599.

[2] Universidade Federal de Sergipe (UFS), Departamento de Fonoaudiologia e do Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGED, rosanagivigi@gmail.com, orcid.org/0000-0001-6592-0164.

Abstract: Teaching and learning mathematics involve specific cognitive operations that are challenging in the context of inclusive education. This study aimed to analyze the mathematics teaching and learning process of a student with autism undergoing a collaborative intervention. This is a qualitative study that uses the microgenetic and the collaborative and critical action research methods. It was conducted within the regular school system, and the student with autism was followed up weekly for twelve months. Participant observation, collaborative work, and a field diary were used to collect and record data. The results show that, regardless of his diagnosis of autism, differentiated strategies and qualified mediation allow the student to build new structures, reorganizing the content he had previously learned; learn mathematical concepts; and develop higher mental functions. Finally, the collaborative work in the classroom allowed for the adequate planning of classes for the student and for the adaptation of strategies and methodologies, thus contributing to his inclusion in the school.

Keywords: *Mathematics. Inclusive Education. Autistic Spectrum Disorder. Action Research.*

1. INTRODUÇÃO

A matemática é uma área do conhecimento que tem um sistema de representação próprio e demanda domínios cognitivos que exigem uma complexa atividade mental (Balderas *et al.*, 2020). O ensino e a aprendizagem da matemática estão diretamente ligados a operações cognitivas específicas. Talvez por essa razão os estudantes brasileiros tenham baixo nível de rendimento, como revelam os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) (Relatório do Sistema de Avaliação da Educação Básica, 2017). As dificuldades tornam-se ainda maiores quando se trata da pessoa com deficiência no contexto da educação inclusiva.

A educação inclusiva é um paradigma educacional sustentado pela concepção de direitos humanos, que compreende que todos os alunos devem ter suas necessidades atendidas na escola regular. Para isso, no Brasil, foi aprovada a Portaria n. 948/2007, que foi colocada em ação com a Política Nacional de Educação Especial na perspectiva da educação inclusiva, "visando constituir políticas públicas promotoras de uma educação de qualidade para todos os alunos" (Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação

Inclusiva, 2008, s.p.). Sabe-se que esse é um grande desafio e, por isso, a Educação Especial, como modalidade de ensino transversal a todos os níveis, deve oferecer os serviços necessários para garantir a inclusão, dando o suporte para que o aluno se desenvolva.

A política nacional no Brasil definiu como público-alvo da Educação Especial os alunos com deficiência, transtornos globais de desenvolvimento e altas habilidades/superdotação (Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva, 2008). Dentro dos transtornos globais de desenvolvimento está o autismo. Este é um transtorno global do desenvolvimento, também chamado de Transtorno do Espectro Autista (TEA), e as alterações podem levar a dificuldades adaptativas. Não possui causa especificada, é mais comum em crianças do sexo masculino e independe da etnia, da origem geográfica ou da situação socioeconómica. O Transtorno do Espectro Autista engloba diversos distúrbios do neurodesenvolvimento, destacando-se as dificuldades de comunicação, interação e comportamento (Zeidan *et al.*, 2022).

Ao fazer a inclusão de alunos com autismo em turmas de ensino regular, o professor se depara com desafios, como a interação e o desenvolvimento do processo pedagógico (Takinaga y Manrique, 2022). Para esses alunos, são necessárias adaptações para que desenvolvam seu potencial de aprendizagem.

No caso da Matemática, considera-se que essa área do conhecimento possui muitos conteúdos complexos, com relações abstratas que dificultam seu aprendizado. Levando-se em conta algumas características tidas como "universais" no autismo como, por exemplo, a dificuldade de flexibilização do raciocínio, será possível prever algumas dificuldades em relação à aprendizagem de matemática para esses alunos.

O objetivo deste estudo foi analisar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática de um aluno com autismo, a partir da intervenção colaborativa.

2. PERSPECTIVA DE VIGOTSKI PARA O DESENVOLVIMENTO E A APRENDIZAGEM

Para a Teoria Histórico-Cultural (THC) será através das relações sociais que acontecerá o desenvolvimento das capacidades humanas, como a inteligência. O humano vai se constituindo a partir de sua vida social e das experiências historicamente produzidas. Ao pensar nas experiências sociais, os processos educacionais serão importantes para o desenvolvimento de determinadas capacidades psíquicas.

Se ao nascer estão presentes as funções mentais elementares, é ao longo da história social que se construirá o desenvolvimento mental, as funções mentais superiores, o que dependerá do seu aprendizado da cultura. Esse desenvolvimento não é imediato e nem direto e será fruto do trabalho social humano. Será a partir da ação das funções culturais, sob as funções biológicas, que o conhecimento será construído e que dará suporte ao desenvolvimento mental. Sendo assim, as atividades sociais e culturais são essenciais para essa transformação (Vigotski, 1987, 2007).

No processo educativo, com a mediação do adulto, as ações internas são educadas, pois as funções psíquicas elementares são a base para as funções psíquicas superiores, e "no processo de desenvolvimento cultural, as funções se substituem por outras, em níveis de desenvolvimento cada vez mais complexos, em termos qualitativos" (Vigotski, 2007, p. 120).

Para Vigotski (2009, 2016), a aprendizagem e o desenvolvimento são eventos diferentes e são complexas as relações entre eles. Para o autor, a aprendizagem favorece uma organização que conduz ao desenvolvimento mental e aciona o processo de desenvolvimento. Ela é essencial para que a criança se desenvolva, principalmente no que se refere a características humanas que não estão ligadas à natureza, características essas que foram construídas ao longo da história.

Um importante conceito no âmbito do desenvolvimento é o de zona de desenvolvimento iminente,[3] que é "a distância entre o nível de desenvolvimento real, [...] e o nível de desenvolvimento potencial" (Vigotski, 2007, p. 95). A importância desse conceito para o processo de ensino e aprendizagem é ampla, na medida em que possibilita o entendimento do caminho do desenvolvimento, valorizando estruturas que ainda serão desenvolvidas. A zona de desenvolvimento iminente pode ser uma aliada no planejamento de desafios quando delimita os próximos passos para o desenvolvimento da criança a partir de processos que estão em formação.

Para Vigotski (2009), a formação dos conceitos se realiza por meio de signos. Em seus experimentos, o estudioso observou a necessidade de domínio dos processos psicológicos por meio do uso funcional do signo para que se concretize a formação de conceitos, e tal processo não deve ser visto como uma elaboração de habilidades. Na sua teoria, a construção desse processo engloba três estágios.

[3] Tradução defendida por Prestes (2010) da expressão russa "Zona Blijaichego Razvitia", sendo por essa autora apresentada como mais adequada à interpretação das ideias de Vigotski, o que justifica nesta pesquisa a utilização e a substituição da palavra "proximal" por "iminente" nas citações apresentadas neste texto.

O primeiro é definido quando a criança ainda é bem nova. Constitui-se como uma elaboração indefinida e sem conexão com o significado da palavra. O segundo estágio é aquele em que existe o desenvolvimento por complexos, estágio em que a criança começa a ser capaz de formar grupos através da unificação dos objetos. O terceiro estágio é o do pensamento por conceitos, que é caracterizado pelas novas formações, ele não se concretiza de maneira linear, vai se delineando ao longo do desenvolvimento da criança. É o momento em que a criança é capaz da abstração sem a necessidade de apoio concreto e factual. A abstração será a capacidade de relacionar, comparar e analisar, isto é, coordenar as ações, o que levaria ao raciocínio lógico-matemático (Vigotski, 2009). Portanto, a formação de conceitos percorre um longo caminho e, por isso, é possível identificar dois tipos de conceitos: os espontâneos e os científicos.

Quando se refere aos conceitos espontâneos, Vigotski (2009) destaca conceitos formados pela aprendizagem antes da criança entrar na escola, os quais são concretizados a partir da experiência, sem estarem devidamente sistematizados, o que é mediado pela experiência do seu contexto social. Ainda de acordo com Vigotski (2009), os conceitos científicos são aqueles adquiridos de forma intencional, partindo-se de uma organização e sistematização, resultado da modificação, da abstração e da compreensão de um conceito mais genérico; são muito associados ao contexto escolar, que procura desenvolver a aprendizagem de forma sistematizada. Por isso, no caso da matemática o planejamento, a utilização de recursos didáticos, uma avaliação mais dinâmica, são meios capazes de despertar no aluno a aprendizagem, tornando o processo ativo e eficiente.

3. MÉTODO

Essa pesquisa é de natureza qualitativa e neste caso irá descrever e explicar os fenômenos. No caso, a descrição é feita de forma minuciosa, através de registros, como entrevistas e observações, e devem ser analisados considerando a base epistemológica, neste caso a Teoria Histórico-Cultural. Ao fazer uma investigação qualitativa, o processo da pesquisa e os significados são de extrema importância (Mineiro *et al.*, 2022).

A metodologia utilizada para alcançar o objetivo deste trabalho foi a pesquisa-ação e o método microgenético. O método microgenético toma como base a análise e a explicação do processo e a dinamicidade do comportamento. Neste método, procura-se detalhar ações, relações, interações, contextos e cenários, sempre na historicidade e reconhecendo o movimento que se dão as relações intersubjetivas (Vigotski, 2007).

Já a pesquisa-ação "é uma atividade de compreensão e de explicação da práxis dos grupos sociais por eles mesmos, com ou sem especialistas em ciências humanas e sociais práticas, com o fito de melhorar sua práxis" (Barbier, 2007, p. 14), ou seja, se constitui como uma pesquisa social.

A pesquisa realizada apresenta a abordagem de uma pesquisa colaborativa-crítica e, conforme preconizam Carr y Kemmis (1988), sustenta-se na teoria crítica-emancipatória de Habermas (1987). Uma emancipação será resultado de uma teoria crítica, que propiciará aos indivíduos uma dinâmica crítico-reflexiva.

O foco do trabalho de campo desta pesquisa foi uma criança com autismo e seu acompanhamento escolar. O aluno participante desta pesquisa é do sexo masculino, tem onze anos, está inserido em turma regular no Ensino Fundamental. Para garantir o anonimato, o aluno recebeu o nome fictício de Guilherme, recorrendo algumas vezes à abreviatura "G".

O período de atividade no campo de pesquisa foi de 26 de julho de 2018 a 30 de julho de 2019, período em que o aluno cursou o segundo semestre do quarto ano e o primeiro semestre do quinto ano do Ensino Fundamental. O acompanhamento se desenvolveu semanalmente no contexto da sala de aula, com duração de quatro horas e no turno referente à matrícula, durante o período de doze meses, contabilizando quarenta visitas.

Guilherme trocou de escola[4] durante o acompanhamento, assim a pesquisa foi realizada em três escolas do ensino regular no município de Aracaju, no estado de Sergipe. Para a efetivação da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados foram: observação participante, reunião com professores (professor da sala de aula regular e professor da sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE)) e trabalho colaborativo em sala de aula. O diário de campo foi o instrumento utilizado para os registros dos dados, descrevendo os fatos num processo de reflexão sobre a ação (França *et al.*, 2022).

A observação participante é uma técnica em que o pesquisador está inserido no grupo investigado, participa das atividades e do processo tentando identificar como as relações se estabelecem e compreender os movimentos do grupo (França *et al.*, 2022). Das quarenta visitas às escolas, foram em média três visitas, em cada escola, para observação inicial, porém durante todo o trabalho

[4] As escolas foram nomeadas como Escola 1, 2 e 3, seguindo a ordem cronológica do estudo e da troca das escolas.

houveram momentos de observação concomitantemente ao trabalho colaborativo. Foram observados, nesse contexto, a rotina escolar, as atividades de sala de aula, a organização da escola, a equipe, os alunos, o recreio, passo fundamental para iniciar o trabalho colaborativo.

Quanto às reuniões com as professoras da sala de aula regular e da sala de Atendimento Educacional Especializado, aconteciam conforme a necessidade, pois o diálogo era permamente durante o trabalho colaborativo em sala de aula. Durante os doze meses foi constante o trabalho colaborativo na sala de AEE e na sala de aula.

O trabalho colaborativo desenvolve no professor a dinâmica de olhar para suas experiências anteriores na prática educativa, rever as ações, e assim desenvolver novos planejamentos e novas ações (Sadovsky *et al.,* 2019).

Nesse período, foi desenvolvido um planejamento de Matemática específico para o aluno acompanhado, baseado nas dificuldades apresentadas durante o processo de acompanhamento e fundamentado nas formas de respostas com as quais G. já tinha familiaridade. Os passos do trabalho desenvolveram-se em três momentos: Observação do cotidiano escolar (26/07/2018 a 31/08/2018) – Escola 1; Observação e trabalho colaborativo na sala de aula (21/09/2018 a 27/11/2018) – Escola 1; e Observação e trabalho colaborativo com intervenção com planejamento específico para o aluno (15/03/2019 a 30/07/2019) – Escola 2 e Escola 3).

A análise foi baseada nos pressupostos da teoria histórico-cultural, que tem como base as formulações marxistas, o materialismo histórico-dialético, que opera a partir de categorias para que assim seja feita a percepção de uma determinada realidade. Importante dizer que a partir das capacidades humanas cria-se uma realidade abstrata, mas sempre sobre uma realidade material. Um método, ao basear-se no materialismo histórico-dialético, produz conhecimento partindo do real, do fenômeno concreto. A análise será a partir da abstração e a seguir volta-se novamente ao fenômeno. Neste movimento atividade humana vai produzindo o conhecimento (Moura Evêncio y Falcão, 2022).

Ao agir sobre a realidade material, serão produzidas representações que irão contribuir para entender as relações estabelecidas com o mundo e como a realidade é abstraída. Essas relações entre os fenômenos são dinâmicas e permeadas pela contradição. Num movimento contínuo, cada elemento novo na realidade vai modificar o fenômeno.

A breve discussão feita é importante para a compreensão da definição das categorias, que foi a partir da codificação dos relatórios. Duas grandes categorias emergiram das observações e do trabalho de intervenção, ambos registrados no diário de campo, sendo elas: estratégias de ensino; aquisição de conceitos e aprendizagem da matemática.

Desta maneira, os dados coletados serão discutidos objetivando analisar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática de um aluno com autismo, a partir da intervenção colaborativa.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nas últimas décadas no Brasil houveram muitas mudanças nas políticas da Educação Especial, mas mesmo assim o processo de aquisição de conceitos científicos, para esses alunos, se resume, geralmente, a aprender letras, pequenas palavras e associar números e quantidades, deixando de lado, por exemplo, as operações aritméticas fundamentais e os demais conteúdos (Souza y Silva, 2019).

Como o objetivo da pesquisa era analisar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática de um aluno com autismo, a partir da intervenção colaborativa, o primeiro momento se caracterizou como um período de observação do cotidiano escolar. A observação participante constitui-se como um método de recolha de dados, apropriado para estudos descritivos e com diversos níveis de envolvimento, que aproxima o pesquisador do grupo pesquisado, buscando compreender a dimensão histórica e sociocultural do grupo pesquisado (França *et al.*, 2022). Na teoria histórico-cultural a observação participante é também compreendida como uma aproximação com o campo e com os participantes (Mineiro *et al.*, 2022; Vigotski, 2007).

Ao observar a realidade escolar, foi percebida a necessidade da elaboração de um planejamento pedagógico com objetivos de aprendizagem específicos para Guilherme. O trabalho com um aluno com autismo deve levar em conta todas as suas características, e para G. não foi diferente; o primeiro passo desse processo foi a sua adequação a uma rotina, o que é primordial para crianças, especialmente com autismo.

Logo, fazia-se necessário facilitar o acesso à rotina para Guilherme. A rotina começava com a entrada na escola, a carteira que iria sentar, o material que deveria estar disposto na carteira, a sequência das aulas, os tempos de cada atividade e de recreação e assim sucessivamente. O trabalho em parceria com a professora da sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE) foi iniciado e, assim, instaurou-se o trabalho colaborativo. Mesmo com a criação dessa rotina, não houve, na Escola 2, condições de utilizá-la, a adaptação não foi concretizada, e a organização dessa escola não favoreceu a inclusão do aluno acompanhado. A família decidiu trocá-lo de escola. A teoria de Vigotski (1987, 2016), em seus conceitos discussões demonstra o quanto a abordagem escolar deve atender as particularidades dos alunos, e que o professor, nessa perspectiva, teria uma práxis transformadora.

A rotina criada foi utilizada na Escola 3, pois a professora da sala de AEE trabalhava nas escolas 2 e 3. A apresentação da rotina deu-se logo após uma reunião com a sua nova professora e a adaptação do aluno na escola, assim que demonstrou conhecer o ambiente e as rotinas da unidade escolar. Daí em diante, semanalmente, o trabalho colaborativo acontecia na sala de aula de G. e na sala de recursos, envolvendo a professora da sala de aula e a professora da sala de recursos. O trabalho colaborativo incluiu a observação, planejamento, ação, reflexão, relacionando a teoria e prática (Carr y Kemmis, 1988),

O planejamento individual para ensinar Matemática foi feito pelas professoras e a pesquisadora. Partiu do nível inicial da elaboração dos conceitos, numa abordagem gradativa das complexidades dos conceitos matemáticos. Como conteúdos iniciais de matemática, Guilherme, no início da pesquisa, dominava a representação dos números, as sequências realizadas de forma sistemática e a escrita por extenso dos números de 0 a 10. As descrições realizadas do início dos resultados até o momento explicitam as medidas preparatórias para iniciar a intervenção pedagógica propriamente dita; ou seja, os procedimentos prévios antes de iniciar a intervenção direta no processo de ensino-aprendizagem de G.

O planejamento pedagógico individual foi baseado em orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que são propostas unidades temáticas e apresentadas habilidades que deverão ser desenvolvidas na Educação Básica brasileira (Base Nacional Comum Curricular, 2017). Para esta pesquisa, foram destacados conteúdos que iriam possibilitar avanços na aprendizagem de conceitos matemáticos do aluno participante. O planejamento contemplou conteúdos que G. ainda não dominava, seguindo a BNCC (figura 1).

PLANEJAMENTO PEDAGÓGICO PARA MATEMÁTICA	
AULAS	CONTEÚDO(S) EXPLORADO(S)
01	Noções espaciais: perto/longe.
02	Noções espaciais: em cima/embaixo.
03	Noções espaciais: dentro/fora.
04	Comparação de grandezas: igual/diferente.
05	Comparação de grandezas: maior/menor.
06	Formas geométricas planas: triângulo, quadrado, retângulo e círculo.
07	Números e sistemas de numeração: Contagem, ordenação e escrita por extenso dos números de 0 a 9.
08	Relação quantidade/numeral: 0 a 5.
09	Relação quantidade/numeral: 6 a 9.
10	Relação quantidade/numeral: 0 a 9. (Revisão)
11	Maior/menor e igual. (Números)
12	Operação de adição. (Conceito)
13	Operação de adição. (Operação das quantidades de 0 a 9)
14	Operação de adição. (Operação com números de 0 a 5)
15	Operação de adição. (Operação com números de 0 a 9)
16	Operação de adição. (Operação com números de 0 a 9)
17	Operação de adição. (Desenvolver a escrita matemática para a operação de adição)
18	Operação de adição. (Resolver as operações a partir da representatividade dos dedos das mãos)
19	Formas espaciais geométricas: cilindro, pirâmide, cone, esfera, cubo e paralelepípedo.
20	Números e sistemas de numeração de 0 a 20.
21	Revisão: números e sistemas de numeração de 0 a 20, relação quantidade/numeral e relação de adição.
22	Revisão: noções espaciais: em cima/embaixo, perto/longe e operação de adição.
23	Revisão: noções espaciais: dentro/fora, comparação de grandezas igual/diferente e operação de adição.

Figura 1. Planejamento pedagógico com descrição de conteúdos para o aluno acompanhado.

Levando em consideração que o aluno estava passando pelo processo de implementação do sistema da Comunicação Alternativa e Ampliada (CAA), na Clínica Fonoaudiológica da Universidade Federal de Sergipe, algumas atividades foram elaboradas utilizando-se símbolos pictográficos disponíveis na plataforma ARASAAC, os quais permitiam estabelecer uma comunicação com o aluno e faziam a ligação entre ele e os conceitos matemáticos, que eram objetivados em cada aula. A Comunicação Alternativa e Ampliada é entendida como um conjunto de ferramentas que permite às pessoas que não falam terem outra forma de comunicação, seja com material gráfico, desenhos, fotos, alfabeto, sistemas computacionais, entre outros (Givigi *et al.*, 2022).

Guilherme passou por 2 (duas) mudanças de escola no ano letivo de 2019; na Escola 2, permaneceu apenas por um mês, sendo transferido para a Escola 3. O primeiro desafio desse processo foi que G. criasse uma relação com a escola e participasse das atividades. No primeiro momento da aula, Guilherme apresentava-se desatento e inquieto, era necessário que aprendesse como funcionavam a escola e sua organização.

No momento das atividades, a pesquisadora respeitava a organização escolar e, principalmente, o planejamento do trabalho do professor em sala de aula. As atividades eram propostas no mesmo momento em que os outros alunos estavam em atividade nas aulas de Matemática. É importante destacar que G. não dominava os conteúdos propostos para seu ano escolar, por esta razão em alguns momentos eram propostos conteúdos diferentes de sua turma.

A organização das atividades foi dividida em dois momentos: o primeiro, de atividades mais lúdicas e com material concreto; o segundo, de atividades impressas. Esse modo de aplicação foi eleito por se acreditar que as atividades mais concretas, com manipulação, uso de jogos e resolução de problemas, favorecem a aprendizagem dos alunos, pois despertam o interesse, possibilitando, assim, ultrapassar as dificuldades (Izagirre *et al.*, 2020). Já as atividades impressas contribuem para sistematização do domínio do conteúdo. Todo o trabalho foi desenvolvido em sala de aula, com a presença da pesquisadora e professora de sala de aula, e por vezes com a professora da sala de AEE. Vigotski (2016), ressalta a importância de que as atividades educacionais sejam organizadas de forma a compensar a limitação fisiológica, e que habitualmente a criança com deficiência necessita que sejam criadas formas diferentes de ensinar.

Diante da observação inicial das atividades realizadas por G. na escola, foi percebida a afinidade dele com quebra-cabeças e colagens. Partindo dessa observação, essas atividades foram usadas como estratégias para despertar o seu interesse, para que fosse possível a aprendizagem.

A abstração é um termo muito utilizado na Matemática e geralmente é carregada de uma simbologia muito peculiar, associada àquilo que é difícil. Mas, quando se faz referência a esse termo, ressalta-se o processo de formação conceitual, o qual não depende de situações que possam ser manipuladas, que muitas vezes exige que o professor utilize diversos recursos didáticos (Santana *et al.*, 2020; Izagirre *et al.*, 2020).

Os textos de Vigotski (2007) mostram a necessidade de estimular a criança com deficiência a desenvolver o pensamento abstrato, sendo a escola o local que deveria favorecer esse processo. Assim, o concreto deve "[...] ser visto somente como um ponto de apoio necessário e inevitável para o desenvolvimento do pensamento abstrato – como um meio, e não como um fim em si mesmo" (Vigotski, 2007, p. 101).

Para os alunos que demandam práticas pedagógicas diferenciadas o professor deve estar implicado no processo de ensinar-aprender. As ações colaborativas podem ser um dispositivo para que essa implicação aconteça. Estar na escola semanalmente colocou o pesquisador num processo constante de trocas. Ao estar na sala de aula e na sala de AEE eram criados espaços de conversação sobre a aprendizagem, inclusão escolar, possíveis estratégias pedagógicas e planejamento, tanto com a professora da sala de aula e quanto a da sala de AEE. As situações vividas eram uma oportunidade para planejar nossa intervenção e, juntamente com as professoras, buscar novas alternativas.

Inicialmente, G. fazia as atividades de forma mais intuitiva. A partir da manipulação com os objetos, os jogos e os números, algumas relações foram sendo estabelecidas (Gestal *et al.*, 2019). Nos primeiros seis conteúdos do planejamento (vide figura 1), que consistiam nas noções espaciais, comparação de grandezas e formas geométricas, foi utilizado como estratégia o uso de materiais concretos, a colagem, jogos e atividades no caderno. As diferentes estratégias eram sempre mediadas pelo pesquisador e pela professora.

As noções espaciais como embaixo, em cima, dentro e fora, foram aprendidas gradativamente. Primeiro fazendo relação entre os objetos, envolvendo poucos elementos. Durante as atividades sobre noções espaciais, os objetos da sala e outros, que eram levados, foram utilizados como referenciais. À medida que trabalhava com os jogos ia fazendo relações mais complexas, como, por exemplo, representar os conceitos com desenhos e traços. O mesmo foi feito com a comparação de grandezas e com as formas geométricas planas, o que também trouxe bons resultados.

Atividades com a utilização da Comunicação Alternativa e Ampliada foram importantes para o processo de aprendizagem de G., uma vez que esse recurso de tecnologia assistiva proporcionou a comunicação necessária para expor as situações e fazer o aluno responder aos questionamentos (figura 2).

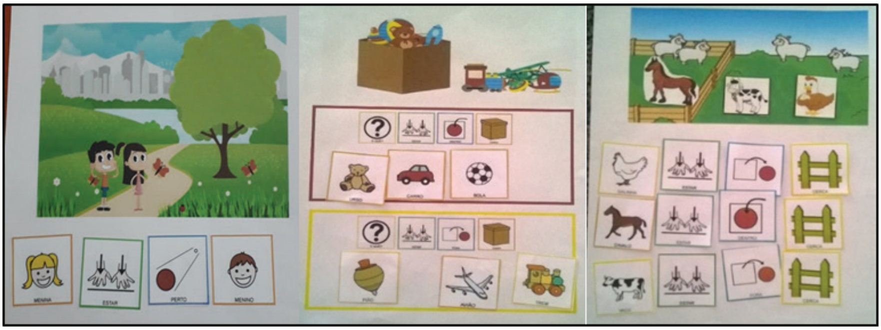


Figura 2. *Atividades com utilização da CAA.*

A formação dos conceitos não foi uma construção simples. Apresentar as atividades e levar o aluno a construir as suas representações foi um caminho percorrido de forma gradativa. Fazer esse aluno enfrentar as suas limitações, sistematizando essa construção, foi um processo contínuo e acompanhado de muita mediação. O vínculo entre os conceitos cotidianos e científicos é explicado por Vigotski, mas sabe-se que os conceitos científicos exigem maior capacidade de generalização e de pensamento, o que exigiu maior esforço por parte de G.

As funções mentais superiores são resultado da combinação do uso de instrumentos materiais e do uso de signos. Os instrumentos materiais são orientados externamente, e os signos são orientados internamente, mas ambos são construções mediadas. Nas relações intersubjetivas, a criança mediada por instrumentos e signos vai se desenvolvendo, num processo de construção e reconstrução da atividade social. Esse processo de reconstrução externa só é possível pela atividade com os signos. Portanto, para Vigotski as funções psicológicas superiores são mediatizadas semioticamente. A transição para as funções psicológicas superiores torna possível a aprendizagem de símbolos e signos, como a fala, o desenho, o esquema, os números, o mapa, a escrita, dentre outros.

À medida que íamos avançando na aprendizagem, percebíamos que G. formava outros esquemas mentais. Os conteúdos de sete a dez do planejamento (vide Figura 1), envolviam os sistemas de numeração, a relação quantidade/

numeral de 0 a 9. Num primeiro momento, fazia construções aleatórias com os números, por isso fomos tentando conhecer e compreender as estratégias que ele utilizava para que assim a mediação fosse mais efetiva. Para compreender como estruturava seu pensamento, foram utilizados diversos jogos, como trilhas, caça-palavras, correspondência, dentre outros (figura 3).

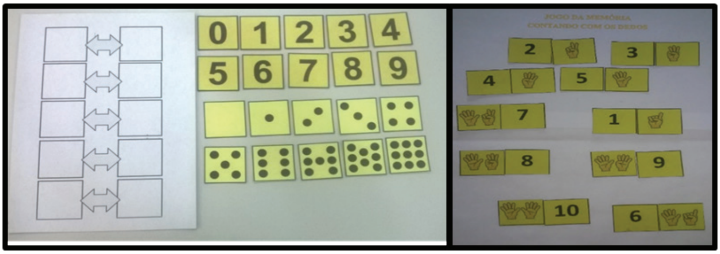


Figura 3. *Exemplos de atividades de colagem e quebra-cabeça utilizadas no planejamento pedagógico.*

Reconhecer o número zero foi um desafio para G. Sabia da sua existência (representação e escrita por extenso), mas não conseguia olhar um conjunto vazio e associá-lo ao número zero. Ainda que identificado como representação, o entendimento da quantificação (Ávalos Esparza y Solares Pineda, 2018) era muito difícil para G., por isso resistia a atividades que envolvessem o zero. As atividades com material dourado, palitos e outros materiais ajudaram a ver que não deveria ter nenhum cubinho naquele conjunto. Depois de muitos tipos de atividades passou a executar sozinho a retirada dos cubinhos, ou dos palitos.

A relação entre os conteúdos é quase sempre percebida no processo de aprendizagem, portanto, ao compreender a estrutura interna do sistema de numeração, a criança poderá compreender a adição (Silva y Cedro, 2019; Torregrosa *et al.*, 2020).

Seguindo com o planejamento, os conteúdos de 11 a 18 (vide Figura 1) foram os conceitos de maior/menor e igual, e operação de adição. O processo da soma pareceu muito novo para G., mas com a manipulação de materiais concretos ia compreendendo. Era capaz de identificar os números e relacionar com a quantidade, e após intervenção aprendeu a fazer a soma com sementes, com os dedos, com pauzinhos, com dados de sinais (+ e =), o que mostrava uma forma de manipulação. O ensino da operação de adição também foi apoiado em material concreto.

Muitas vezes fez as somas por tentativa e erro, e aos poucos foi criando uma relativa independência dos materiais manipuláveis e aprendendo a realizar as operações de adição fazendo a escrita matemática, como 7 + 1, 6 + 2, 5 + 5.

Para a aprendizagem da adição diferentes estratégias foram utilizadas, o que é apontado em outros trabalhos como eficaz (Souza y Silva, 2019). A resolução de problemas foi uma delas, sendo um recurso muito eficiente no campo da Matemática. Foram elaboradas atividades buscando-se valorizar cada etapa do conceito dessa operação. Era feita uma avaliação constante do trabalho e dos resultados, algumas vezes era decidido que, mesmo sem a compreensão total, era possível avançar e reapresentar o assunto, bem como modificar as atividades.

Fechando o planejamento foram trabalhadas as formas espaciais geométricas, o sistema de numeração de 0 a 20, e foi feita uma revisão geral dos conteúdos trabalhados (conteúdos de 18 a 23, vide Figura 1). Como G. tinha aprendido de 0 a 9 ampliar para até 20 foi um movimento mental em que apresentou menos dificuldades.

Era perceptível como G., a partir de um aprendizado, como, por exemplo, das quantidades, ia estabelecendo outras combinações. Assim, foi com os números de 10 a 20, ele partiu do que já sabia e foi fazendo novas relações, manipulando os objetos referentes às quantidades e sua representação numérica. Com a mediação ia refletindo e fazendo novas combinações, que iam mostrando um maior nível de abstração. Isso ficou evidente numa atividade de organizar os números de acordo com a sequência crescente. Guilherme iniciou escrevendo imediatamente os números que estavam faltando de 1 a 9, quando chegou no 10 parou, olhou para os outros espaços, como se pensasse. A partir do 12 foi compreendendo e fazendo juntamente com o mediador (Figura 4).

Figura 4. *Recurso didático para o ensino do sistema de numeração.*

As associações feitas por G. mostram que ele constrói imagens mentais, embora muitas vezes faça por tentativa e erro. Outro fato importante que demonstra seu progresso é o fato de não precisar mais dos materiais manipuláveis na maioria das vezes. Outros estudos mostram que o fato de não depender mais dos materiais é uma forma de medir o progresso, porque são capazes de fazer apenas a manipulação mental (Balderas *et al.*, 2020). A figura 5, a seguir, traz uma síntese das estratégias utilizadas para aprendizagem dos conteúdos propostos.

Figura 5. Síntese dos conceitos adquiridos e das estratégias utilizadas.

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS	CONTEÚDOS/CONCEITOS PROPOSTOS
Manipulação e colagem de figura para construção de frases utilizando CAA	Identificação e registro em linguagem não verbal das noções espaciais: em cima e embaixo
Utilização de materiais concretos	Identificação da noção espacial, representação das solicitações verbais das noções espaciais: dentro e fora
Manipulação e colagem de figura para construção de frases utilizando CAA	Identificação e registros não verbais das posições das figuras das noções espaciais: dentro e fora
Colagem para realização das comparações utilizando CAA	Percepção visual e classificação das figuras da comparação de grandezas: maior e menor
Utilização de jogos (quebra-cabeça)	Reconhecimento e diferenciação das formas geométricas planas: triângulo, quadrado, retângulo e círculo
Utilização de jogos (quebra-cabeça)	Reconhecimento e diferenciação das formas geométricas espaciais: cilindro, pirâmide, cone, cubo, esfera e paralelepípedo
Manipulação e colagem de figuras	Identificação do sequenciamento dos numerais do sistema de numeração de 0 a 9
Manipulação e colagem de figuras	Identificação das quantidades da relação quantidade/numeral: 0 a 5
Manipulação e colagem de figuras	Identificação das quantidades da relação quantidade/numeral: 6 a 9
Utilização de jogos (quebra-cabeça)	Identificação das quantidades da relação quantidade/numeral: 0 a 9
Resolução de problemas por meio de colagem de figuras	Aprendizagem do conceito inicial da operação de adição utilizando a quantidade
Resolução de problemas por meio de desenho	Aprendizagem do conceito da operação de adição utilizando a quantidade

Material concreto (recurso didático confeccionado)	Resolução da operação de adição apresentada em sentenças matemáticas com números de 0 a 9
Material concreto (recurso didático confeccionado)	Construção das quantidades
Colagem dos sinais e escrita	Escrita matemática da sentença da operação de adição
Atividade escrita	Identificação, ordenamento e escrita do sistema de numeração de 0 a 20
Atividade escrita	Relação de quantidade (0 a 20)

Ao longo da pesquisa, múltiplas técnicas e recursos foram utilizados, o que demonstrou favorecer o elo entre o conhecimento e a internalização dos conceitos pelo/para o aluno acompanhado. A elaboração de estratégias, o trabalho sistemático e a mediação mostraram-se aliados ao processo de aprendizagem dos conceitos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A entrada de alunos com deficiência nas escolas regulares deu visibilidade a problemas já existentes, como: dificuldades na aprendizagem, dificuldades na interação, desconhecimento de métodos e técnicas, falta de recursos, dentre outros. Para que a instituição escolar se torne inclusiva, é preciso romper com a perspectiva de que todos os alunos terão comportamentos e condições de aprendizagem homogêneas. A escola inclusiva trabalha com a premissa de valorização da diferença e da diversidade (Naraian y Schlessinger, 2018; Stelitano *et al.*, 2019; Souza y Silva, 2019).

Historicamente, em quase todo o mundo, o sistema escolar excluiu as pessoas com deficiência, como os alunos com Transtorno do Espectro Autista. Atualmente, há uma tendência crescente de incluir essas crianças nas escolas regulares. Pesquisas mostram que as crianças com autismo se beneficiam no ambiente da escola regular (Souza y Silva, 2019; Pinto *et al.*, 2022).

Sendo um estudo baseado nos pressupostos da matriz sócio-histórica, na perspectiva teórico-metodológica da pesquisa-ação colaborativo-crítica, entendíamos que a escola deveria se organizar de forma que garantisse que o processo de ensino e aprendizagem oferecesse oportunidades variadas para que G. aprendesse. O processo inclusivo depende da quebra de espaços/tempos rígidos e de um planejamento cuidadoso que atenda aos mais variados níveis de aprendizagem da sala de aula (Barbosa, 2022).

Nossa hipótese foi que o trabalho colaborativo com professor poderia levar crianças com autismo a progredirem em sua aprendizagem e a ter domínio social. Neste estudo, a trajetória de aprendizagem do aluno acompanhado foi analisada em nível individual, considerando-se o seu ritmo de aprendizagem e a utilização de estratégias variadas que atendessem a suas demandas.

As estratégias metodológicas incluíram atividades lúdicas, jogos, trabalho com o espaço e o corpo, materiais específicos da Comunicação Alternativa, atividades impressas (folhas impressas, livro didático), entre outras. É possível concluir que, com o processo de mediação do professor e da pesquisadora, com um planejamento pedagógico individual e com as estratégias utilizadas, Guilherme teve a possibilidade de aprender conceitos científicos de matemática. As estratégias para o ensino da matemárica do aluno com autismo são citadas como um elemento de grande importância, sugere-se que se utilize diferentes recursos pedagógicos, materiais concretos, adequações curriculares, além de exigir uma reorganização dos conteúdos (Coury, 2022).

A colaboração entre pesquisadora e docente concretizou-se na construção da confiança e na cooperação. O trabalho colaborativo, ao que tudo indica, pode ter contribuído para a aprendizagem da matemática pelo aluno participante (Sadovsky *et al.*, 2019). A gestão, juntamente com o grupo de professores, são os pilares para o processo de inclusão. Quando se desenvolve o trabalho de colaboração, na relação dialética, poderá se constituir o apoio mútuo, e o fortalecimento do processo de ensinagem.

Por fim, a aquisição dos conceitos científicos, como afirma Vigotski (2009), contribui com a internalização de conceitos matemáticos, que será resultado de múltiplos fatores, dentre eles: a necessidade da aquisição de conhecimento; a vinculação das experiências ao conhecimento científico; a sistematização dos conhecimentos; a relação entre o conhecimento prévio com a realidade e com o conhecimento científico (Silva y Lorenzetti, 2022). Porém, para que o aluno com autismo possa chegar até a construção do conhecimento científico, é necessário que as equipes que compõem as instituições de ensino na rede regular se comprometam a aprender e a utilizar recursos, métodos, técnicas e estratégias diversas e, acima de tudo, a questionar permanentemente suas práticas e seus saberes.

AGRADECIMENTOS

Fundação de Apoio à Pesquisa e à Inovação Tecnológica do Estado de Sergipe (FAPITEC).

REFERÊNCIAS

Ávalos Esparza, O. y Solares Pineda, D.V. (2018). "Los ceros también valen". Conocimientos de alumnos de sexto grado de primaria sobre el cero como elemento del sistema decimal. *Educación Matemática, 30*(3), 55-82, 2018. https://doi.org/10.24844/em3003.03

Balderas, M.J.C., Páez, D.A., y Pérez, M.G. (2020). Discusión teórica sobre las prácticas docentes como mediadoras para potencializar estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemáticas. *Educación Matemática, 32*(1), 221-240. https://doi.org/10.24844/EM3201.10

Barbier, R. (2007). *A pesquisa-ação*. Tradução Lucie Didio. Liber Livro Editora.

Barbosa, S. G. (2022). O Plano Individualizado de Transição como recurso pedagógico para alunos com Transtorno do Espectro do Autismo. *Cadernos Macambira*, 7(3), 225-231.

Base Nacional Comum Curricular. (2017). http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf

Carr, W. Y Kemmis, S. (1988). *Teoria critica de la ensenanza* . La investigacion - accion en la formacion del profesorado. Ediciones Martinez Roca.

Coury, L. M. S. (2022). *Autismo e estratégias para o ensino da matemática*: um estudo de caso nos anos iniciais do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Básica) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira. 94p. http://www.ppgeb.cap.uerj.br/wp-content/uploads/2023/01/Dissertacao-Layla-Mariana-Sucini--Coury-revisao-concluida.pdf

França, A. de, Costa, F. L. P., Santos, R. Fernandes, Lira Mota, W. de, y Gutierrez, D. M. D. (2022). A observaçao participante: um panorama histórico-conceitual do uso da técnica. *Revista Ensino de Ciências e Humanidades-Cidadania, Diversidade e Bem Estar-RECH,* 6(2,jul-dez), 106-117. https://periodicos.ufam.edu.br/index.php/rech/article/view/10091

Gestal, C.J., Alcaraz, A.B., y Salgado, M. (2019). Cómo trabajar la orientación espacial de modo significativo en Educación Infantil: implicaciones didácticas. *Educación Matemática, 31*(2), 61-74. http://doi.org/10.24844/EM3102.03

Givigi, R. C. N., Cunha, E. M.da, Souza, J. T. P. de, Oliveira, L. M., y Dourado, S. S. F. (2022). Physical functionality of alternative communication resources in people with cerebral palsy: A systematic review. *Technology and Disability, 34*(1), 13-23. https://content.iospress.com/articles/technology-and-disability/tad200299

Habermas, J. (1987). *Conhecimento e Interesse*. Tradução de José N. Neck. Guanabara.

Izagirre, A., Caño, L., y Arguiñano, A. (2020). La competencia matemática en Educación Primaria mediante el aprendizaje basado en proyectos. *Educación Matemática*, *32*(3), 241-262. https://doi.org/10.24844/EM3203.09

Moura Evêncio, K. M. de, y Falcão, G. M. B. (2022). Inclusão de acadêmicos com deficiência na educação superior: Uma revisão bibliográfica na perspectiva da teoria histórico-cultural. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 1610-1623. https://doi.org/10.21723/riaee.v17i3.16053

Naraian, S. y Schlessinger, S. (2018). Becoming an inclusive educator: Agentive maneuverings in collaboratively taught classrooms. *Teaching and Teacher Education*, *71*, 179-189. https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.12.012

Pinto, R. Z., Godoy, M. A. B., y Costa, A. B. D. (2022). Suporte educacional à inclusão de estudante com transtorno do espectro autista: atendimento educacional especializado na visão dos docentes. *Educação: Teoria e Prática*, *32*(65). https://doi.org/10.18675/1981-8106.v32.n.65.s15876

Política Nacional de Educação Especial na Perspectiva da Educação Inclusiva. (2008). Recuperado em 03 de Agosto de 2020. http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=16690-politica-nacional-de-educacao-especial-na-perspectiva-da-educacao-inclusiva-05122014&Itemid=30192

Prestes, Z.R. (2010). Quando não é a mesma coisa: análise de traduções de Lev Semionovitch Vigotski no Brasil, repercussões no campo educacional. 2010. 295 f. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade de Brasília.

Relatório do Relatório do Sistema de Avaliação da Educação Básica (2017). INEP. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d

Sadovsky, P., Itzcovich, H. Quaranta, M. E., Becerril, M.M.Y., y García, P. (2019). Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en Didáctica de la Matemática: de la reflexión sobre las prácticas a la elaboración de ejes de análisis para la enseñanza. *Educación Matemática*, *31*(2), 105-131. https://doi.org/10.24844/EM3102.05

Santana, E., Ponte, J. P. da, y Serrazina, M. L. (2020). Conhecimento Didático do Professor de Matemática à Luz de um Processo Formativo. *Bolema*, *34*(66), 89-109. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a05

Silva, M. M. da y Cedro, W. L. (2019). Discutindo as Operações de Adição e Subtração com Futuros Professores dos Anos Iniciais. *Bolema*, *33*(64), 470-490. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a02

Silva, S. V., y Lorenzetti, L. (2022). A construção de conhecimentos e formação de conceitos científicos nos anos iniciais. *Quaestio-Revista de Estudos em Educação*, *24*, e022045-e022045. https://doi.org/10.22483/2177-5796.2022v24id4854

Souza, A.C. de y Silva, G.H.G. da. (2019). Incluir não é Apenas Socializar: as Contribuições das Tecnologias Digitais Educacionais para a Aprendizagem Matemática de Estudantes com Transtorno do Espectro Autista. *Bolema*, *33*(65), 1305-1330. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a16

Stelitano, L., Russell, J. L., y Bray, L. E. (2019). Organizing for Meaningful Inclusion: Exploring the Routines That Shape Student Supports in Secondary Schools. *American Educational Research Journal*, *57*(2), 535-575. https://doi.org/10.3102/0002831219859307

Takinaga, S. S., y Manrique, A. L. (2022). Integral do aluno com transtorno do espectro autista e do aluno com deficiência intelectual nas aulas de matemática. *Journal of Education*, *10*(03),33-46. https://scholar.archive.org/work/a4cmbr4i7nbtllk7yuq4okbpyi/access/wayback/https://revistas.rcaap.pt/sisyphus/article/download/27503/20325.

Torregrosa, A., Deulofeu, J., y Albarracín, L. (2020). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación Matem*ática, *32*(3). https://doi.org/10.24844/EM3203.02

Vigotski, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. Ed. Científico Técnica. Vigotski, L. S. (2007). *A formação social da mente*. 7. ed., Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (2009). *A construção do pensamento e da linguagem*. 2. ed. Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (2016). Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. En Vigotski, L. S., Luria, A. R., y Leontiev, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. 14. Ícone, 103-117.

Zeidan, J., Fombonne, E., Scorah, J., Ibrahim, A., Durkin, M. S., Saxena, S., ... y Elsabbagh, M. (2022). Global prevalence of autism: A systematic review update. *Autism Research, 15*(5), 778-790. https://doi.org/10.1002/aur.2696

Autor de correspondencia

Rosana Carla do Nascimento Givigi

Dirección: Av. Augusto Franco, 3500, casa 55, Ponto Novo
Aracaju-SE, Brasil. CEP: 49097-670
rosanagivigi@gmail.com

Telefone: (55)7931946759

 https://doi.org/10.24844/EM3502.11

Los recursos lúdicos para la mejora de la actitud del alumnado de Educación Primaria hacia el aprendizaje de la geometría

Playful resources to improve the attitude of Primary Education students towards learning geometry

Inés Álvarez-Rey,[1] Laura Muñiz-Rodríguez[2]

Resumen: Se presenta el diseño, implementación y evaluación de una intervención didáctica para alumnado de tercer curso (8-9 años) de Educación Primaria basada en el uso de recursos lúdicos, con el objetivo de implicar al alumnado y mejorar su actitud hacia el aprendizaje de la geometría. En primer lugar, se describe un marco teórico basado en una revisión de la literatura sobre los diferentes recursos didácticos que se pueden emplear en el aula, el uso de recursos lúdicos y su relación con las matemáticas. Tras este análisis, se presenta la intervención didáctica llevada a cabo con 10 alumnos y alumnas, seguida de una descripción de los resultados obtenidos tras su diseño, implementación y evaluación. Se concluye que el uso de recursos lúdicos aumenta tanto la motivación como el interés del alumnado hacia el aprendizaje de la geometría en Educación Primaria.

Palabras clase: *Competencia matemática, Educación Primaria, Geometría, Matemáticas, Recursos lúdicos.*

Fecha de recepción: 12 de julio de 2021. **Fecha de aceptación:** 9 de marzo de 2023.

[1] Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Oviedo, inesa5949@gmail.com.

[2] Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Oviedo, munizlaura@uniovi.es, orcid.org/0000-0001-7487-5588.

Abstract: The design, implementation, and evaluation of a didactic intervention for third-year students (8-9 years old) of Primary Education based on the use of playful resources is presented, with the aim of involving students and improving their attitude towards learning geometry. First, a theoretical framework is described based on a review of the literature on the different teaching resources that can be used in the classroom, the use of playful resources and their relationship with mathematics. After this analysis, the didactic intervention carried out with 10 male and female students is presented, followed by a description of the results obtained after its design, implementation, and evaluation. It is concluded that the use of playful resources increases both the motivation and the interest of students towards learning geometry in Primary Education.

Keywords: *Mathematical competence, Primary education, Geometry, Mathematics, Playful resources.*

1. INTRODUCCIÓN

Las pruebas de evaluación externas como PISA (Programme for International Student Assessment) o TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) evalúan el rendimiento del alumnado en diferentes áreas, entre ellas las matemáticas. La figura 1 presenta cómo ha evolucionado el rendimiento en matemáticas en los últimos años en ambas pruebas tanto en España como en el promedio de los países miembros de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos). En el caso de PISA, estudio en el que participa alumnado de 15 años, se observa cierta estabilidad en el contexto español con una disminución significativa en la última edición, siendo las puntuaciones medias estimadas en España en todo momento inferiores a las que se obtienen de media en los países miembros de la OCDE. En el caso de TIMSS, prueba dirigida a alumnado en cuarto curso de Educación Primaria (9-10 años), la situación en España con respecto al promedio de los países miembros de la OCDE es similar a la de PISA, aunque se aprecia una ligera mejora en el ámbito nacional.

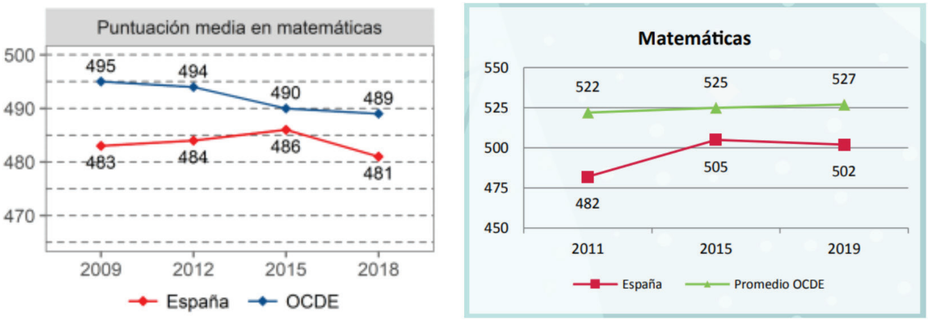


Figura 1. Evolución del rendimiento en matemáticas en PISA (gráfico de la izquierda, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019a, p. 51) y TIMSS (gráfico de la derecha, Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2019b, p. 29).

A raíz de los resultados anteriores, parece necesario analizar qué aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje pueden estar afectando negativamente la competencia matemática del alumnado y reflexionar sobre cómo se pueden mejorar desde la Educación Primaria. En este sentido, los resultados del metaanálisis desarrollado por Hattie (2009) demuestran que la metodología utilizada por el docente y la motivación del alumnado hacia las matemáticas son algunos de los factores con mayor influencia en el rendimiento académico del alumnado, guardando estos a su vez una estrecha relación entre sí.

Dentro de las metodologías a emplear en el aula, aquellas inspiradas en el conductismo entienden el aprendizaje como el resultado de una relación estímulo-respuesta (Heredia Escorza y Sánchez Aradillas, 2020). En este tipo de enseñanza, el docente es centrista, pues impone qué se va a aprender, por lo que el aprendizaje procede del exterior, no siendo necesario que el alumnado razone sobre los contenidos dados (Arredondo *et al.*, 2006). Dentro de esta corriente pedagógica, destaca un uso frecuente del libro de texto como recurso didáctico (Molina, 2006).

Contraria a la anterior, está la rama de las metodologías constructivistas, por un lado, la cognitiva, y por otro, la social. El constructivismo cognitivo concibe al aprendizaje como algo que depende de la situación de la persona, teniendo esta que ser definida en términos de relaciones internas, entre la cultura, el individuo y la situación de la que este forma parte (Herrera *et al.*, 2012). La relación surge gracias a los aprendizajes que la persona adquiere, influyendo, a su vez, en los nuevos conocimientos que se le brindan, siendo el docente un orientador de esas relaciones. El constructivismo social se basa en la relación de la persona con los demás y con el contexto. Pérez (2005) asegura que la persona que aprende no es pasiva, sino que selecciona, evalúa e interpreta la información, aportando un significado a su experiencia. El resultado de lo anterior es la creación de un conocimiento fundamentado en el entorno, las motivaciones del sujeto y sus esquemas previos, así como sus preferencias y su visión del mundo. Así, la aptitud del docente está unida a la contribución en el desarrollo integral del alumnado, es decir, en todas las dimensiones, que según Ordoñez (2006) son la cognitiva, la emocional, la ética y la actitudinal.

Según Díaz (2009), el uso de metodologías constructivistas facilita tanto el aprendizaje como el desarrollo de diferentes actitudes, capacidades y destrezas para trabajar tanto de forma autónoma como cooperativa. Con este tipo de metodologías el docente es un guía en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cada alumno. Hay que tener en cuenta que, para que este modelo de enseñanza sea efectivo, es necesaria la motivación del alumnado, consiguiéndose tanto por la interacción entre el alumno y el docente como con el uso de metodologías que despierten la curiosidad y el conflicto cognitivo.

Es sabido que sin motivación no hay aprendizaje (Glasser, 1981). Con una buena motivación por parte del alumnado habrá una mayor implicación y participación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que hace indispensable la existencia de un elemento motivador. La falta de motivación puede ser favorable a la aparición de dificultades en el aprendizaje en general, y de las matemáticas en particular (Font, 1994) y, en consecuencia, la presencia de dificultades puede suponer un déficit en la comprensión de esta materia. Además, el alumnado debe ser consciente de la utilidad que le puede dar a las matemáticas en su vida cotidiana, siendo lo anterior un elemento que incrementa la motivación. A su vez, Alejandro (2013) concluye que la metodología utilizada por los docentes para la enseñanza de las matemáticas influye en el aprendizaje, de forma que si las estrategias didácticas usadas son obsoletas y tradicionales se genera poco interés, cierta apatía, y un bajo rendimiento. Esto indica que se deben emplear metodologías que sean motivadoras, interesantes y útiles para el alumnado, para así favorecer un aprendizaje significativo.

Una metodología que recoge estas características es el uso de recursos lúdicos, pues permite conseguir, además de un aumento de la motivación y del interés hacia las matemáticas, un mejor desarrollo que involucre lo cognitivo, lo afectivo y lo social (Acevedo-Suárez *et al.*, 2022; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2014; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2021). En particular, Muñiz-Rodríguez *et al.* (2021)

proponen estudiar el impacto del uso de recursos lúdicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los distintos contenidos curriculares de matemáticas y cursos de Educación Primaria. Partiendo de esta necesidad, se diseña, implementa y evalúa una intervención didáctica que tiene como hilo conductor el uso de recursos lúdicos, con el objetivo de mejorar la actitud del alumnado de tercer curso de Educación Primaria hacia el aprendizaje de la geometría, en particular, en lo que se refiere a la identificación y clasificación de distintos polígonos, similitudes y diferencias de los elementos notables de las figuras planas, clasificación de triángulos y cuadriláteros según sus lados, trazado de polígonos, y perímetro y área de un polígono.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Los recursos didácticos para el desarrollo de la competencia matemática

Un recurso didáctico es aquello no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que permite la generación de ideas y conocimientos, haciendo más sencilla la puesta en marcha del proceso de enseñanza-aprendizaje, favoreciendo que sea significativo (Flores *et al.*, 2011). Con el uso de recursos didácticos se pueden diseñar diferentes actividades y proporcionar diversos tipos de experiencias (Baños, 2007).

El uso de recursos didácticos depende tanto de la competencia educativa que se quiera desarrollar, como de la metodología que el docente quiera llevar al aula. En la literatura, podemos encontrar diferentes definiciones del concepto de competencia, algunas de las cuales indican que son capacidades que el alumnado debe desarrollar para ser capaz de poner en práctica lo aprendido en las diferentes áreas del conocimiento, lo que le permitirá resolver las tareas que se proponen (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013).

Ante el tema que nos ocupa, cabe destacar la competencia matemática, de la cual también se pueden encontrar varias definiciones en la literatura. Así, la OCDE (2019) define la competencia matemática como la “capacidad de cada individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos, incluyendo el razonamiento matemático y el uso de los conceptos matemáticos, los procedimientos, hechos y herramientas utilizadas para describir, explicar y predecir fenómenos” (p. 49).

Ahora bien, ¿cómo fomentar el desarrollo de la competencia matemática en el aula? Es aquí donde entra en juego el uso de los recursos didácticos. Hay diferentes autores que tratan este campo. Por ejemplo, en el estudio de Vargas *et al.* (2020) se demuestra que el uso de diferentes recursos, en este caso digitales, favorece que el alumnado aprenda de una forma más independiente, logrando enriquecer en mayor medida sus aprendizajes y mejorar su capacidad en la resolución de problemas, en lo que se refiere a un aumento de la concentración y del interés por el razonamiento lógico-matemático.

Por otro lado, Alsina (2010) define la pirámide de la educación matemática, como una herramienta que, además de presentar una tipología de los diferentes recursos didácticos que se pueden emplear en el aula, indica la frecuencia de uso recomendada, por analogía con la pirámide alimenticia (figura 2). Este autor sitúa en la base de dicha pirámide las situaciones cotidianas, la matematización del entorno, y las vivencias con el propio cuerpo, relegando al último puesto (vértice de la pirámide) el libro de texto. Se observa que los recursos lúdicos son el tercer recurso que se debería emplear en el aula con mayor frecuencia. Este autor considera que los recursos lúdicos pueden ser muy útiles a la hora de mejorar la competencia matemática (Alsina, 2010), aspecto en el que coinciden otros investigadores (Acevedo-Suárez *et al.*, 2022; Alejandro, 2013; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2014; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2021).

Figura 2. Pirámide de la educación matemática (Alsina, 2010, p. 14).

Actualmente, en la enseñanza de las matemáticas, se sigue utilizando el libro de texto como base, en lugar de como complemento (Alsina, 2010; Muñiz-Rodríguez y Rodríguez-Muñiz, 2021). En el estudio realizado por Fernández Palop y Caballero García (2017), se sostiene que el libro de texto, además de ser el recurso central a la hora de enseñar matemáticas, puede suponer un obstáculo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Entre otros aspectos, esta crítica se hace al considerar que los conceptos matemáticos no son tratados en los libros de texto con la profundidad suficiente como para fomentar su comprensión por parte del alumnado (Fernández Palop y Caballero García, 2017).

2.2. La importancia del juego y de los recursos lúdicos

Se sabe que el juego lleva instaurado en nuestra sociedad desde tiempos inmemoriales. Desde los grandes filósofos hasta autores como Piaget, se dice que el desarrollo de los niños está ligado al juego. Entre otros fines, el juego es utilizado por los niños como un modo de evasión del mundo real. Uno de los tipos de juego que distingue Piaget (1985) es el llamado juego simbólico, utilizado por los pequeños en lo que el autor denomina primera infancia para evadirse de la realidad y, además, corregir su vida, pues se somete la realidad al pensamiento del jugador y añade que el juego es un elemento clave en la vida infantil, ya que con él se dan procesos en la mente de los niños que facilitan el acceso al mundo adulto. Jugar ofrece la exposición a diferentes estímulos tanto verbales como no verbales, que favorecen la maduración de la mente y el pensamiento. Además, si se juega colectivamente, se establecen relaciones sociales, beneficiando la socialización del alumnado.

Por su parte, Vygotsky (1979, 1991) también habla de que los pequeños llegan a su pleno desarrollo mediante la interacción, tanto entre iguales como en relaciones con el mundo adulto, pero, igualmente, ese desarrollo se da a través del juego. Así, ambos autores coinciden en que jugar, tanto de forma individual como grupal, es algo fundamental para el desarrollo de las personas, pues favorece diferentes aspectos tanto a nivel mental como social.

A pesar de que los enfoques propuestos en la literatura son diferentes (Sarlé, 2011), en numerosos estudios se concluye que el juego es un medio que favorece el desarrollo del niño (Brooker y Woodhead, 2013; Zosh *et al*., 2017). Además, algunos autores como Chamorro (2010) exponen que el uso del juego facilita que el niño sea capaz de expresar sus sentimientos, intereses y aficiones.

Algunos autores entienden el juego desde un enfoque puramente recreativo, es decir, un elemento centrado en la búsqueda de diversión. Así, Bautista-Vallejo y López (2002) consideran que el juego es una actividad basada en la espontaneidad, siempre voluntaria y libre, que busca el placer del jugador. Es ficticio y el niño es libre de representar o ser lo que quiera, además de considerarse una tarea activa. A partir de lo anterior, algunos autores particularizan esta concepción al hablar de recursos lúdicos, entendidos como el uso de juegos con un fin educativo (Brooker y Woodhead, 2013; Chacón, 2008). Según estos autores, para que un juego pueda ser considerado un recurso lúdico debe presentar un problema a resolver, con diferentes niveles de dificultad, permitir la adquisición de una forma diferente de los contenidos, métodos y actitudes, ofertar un medio de trabajo (en equipo o individual), fortalecer las habilidades que el niño ya tiene, educar, favorecer la creatividad, y mejorar aquellas destrezas donde se presenten dificultades.

Los recursos lúdicos se diseñan y desarrollan a partir de una serie de elementos (Chacón, 2008): un objetivo (en este caso, didáctico), una serie de acciones de naturaleza lúdica que guían su desarrollo y la consecución del objetivo, y unas reglas que estructuran y organizan las acciones. Según Minerva Torres (2002), el diseño y planificación de los recursos lúdicos es clave a la hora de facilitar el aprendizaje para así asegurar que su trasfondo didáctico no pase inadvertido. Los recursos lúdicos, con anterioridad a su aplicación en el aula, deben estar correctamente planificados, adecuados tanto a la forma de llevarlos al aula como a los objetivos de aprendizaje que se quieran conseguir, para así, sacar el mayor partido a su uso (Herrero *et al.*, 2020). Esto se convierte en un trabajo adicional que debe ser realizado por la persona que los diseña, en este caso, el docente.

De lo anterior, se concluye que los recursos lúdicos ayudan a la formación integral del alumnado, no solo suponen una diversión, sino que además promueven la enseñanza y el aprendizaje. Por tanto, si los recursos lúdicos se pueden utilizar como elemento motivacional para educar al alumnado hacia cualquier materia, ¿por qué no usarlo en una asignatura tan mal acogida por el alumnado como es el caso de matemáticas?

2.3. El uso de recursos lúdicos en el aprendizaje de las matemáticas

Los juegos tienen una gran historia dentro de las matemáticas (Bishop, 1998; Ferrero, 1991; de Guzmán, 1984), conexión que invita a pensar que el uso de recursos lúdicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, área que el alumnado suele catalogar como compleja, puede ser beneficioso.

Matemáticas es una materia que presenta un elevado número de dificultades de aprendizaje, principalmente por la necesidad de utilizar el pensamiento más abstracto y formal, obstaculizando el desarrollo de competencias (Ferrero, 1991; Gamboa Araya y Moreira Mora, 2017). Otro factor determinante es la falta de motivación del alumnado hacia esta materia (Font, 1994), principalmente proveniente de la metodología utilizada por el docente a la hora de enseñar matemáticas, basada en estrategias tradicionales que requieren memorizar lo que se pretende que el alumnado aprenda.

Recientemente, el uso de recursos lúdicos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha ganado un papel protagonista en la literatura (Acevedo-Suárez *et al.*, 2022; Divjak y Tomic, 2011; Edo y Deulofeu, 2006; González *et al.*, 2014; del Moral Pérez *et al.*, 2016; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2014; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2021). Entre las ventajas derivadas del empleo de juegos en el aprendizaje de las matemáticas, Gómez (1990) destaca: fomento de la motivación al utilizar rutinas diferentes a la tradicional, aumento de la autoestima derivada de la posibilidad de ganar, promoción de la investigación de formas alternativas de solucionar problemas y de estrategias específicas, e incremento de la implicación por parte del alumnado en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Además del impacto que el uso de los recursos lúdicos en matemáticas puede tener en lo actitudinal, diversos autores destacan que utilizar recursos lúdicos para enseñar matemáticas potencia el desarrollo de la competencia matemática, acerca al estudiante al conocimiento matemático, puesto que le resulta agradable trabajar con esta materia, y ayuda a construir conceptos matemáticos (Brooker y Woodhead, 2013; Evans, 2009; Góngora Vega y Cu Balán, 2009). En particular, del Moral Pérez *et al.* (2016) han evaluado la puesta en marcha del proyecto *Game to learn*, en el cual analizan la diferencia entre usar o no videojuegos para desarrollar diferentes capacidades en el alumnado, entre ellas la inteligencia lógico-matemática, demostrando un aumento del rendimiento del alumnado. Por otra parte, los recursos lúdicos potencian la atención a la diversidad en el aula (Alsina y Planas, 2008).

No obstante, algunos autores han permanecido contrarios a su uso. Algunas limitaciones, señaladas por Gros (2008), son: el tiempo, pues es difícil ajustar el horario dedicado a la asignatura y el tiempo que se va a destinar al uso de recursos lúdicos; los contenidos, pues se tiende a trabajar más aquellos de naturaleza interdisciplinar que los de la propia materia, produciendo un desajuste entre los recursos lúdicos y los objetivos de aprendizaje; y la explicitud de los conceptos, ya que se debe saber contrastar y relacionar los conceptos a trabajar con las acciones que se están llevando a cabo durante su implementación aunque, en un principio, parezca no haber conexión.

Pese a lo anterior, se concluye que el uso de recursos lúdicos tiene un potencial significativo, pues favorece la implicación y motivación del alumnado hacia las tareas que se quieren llevar a cabo, solucionando el principal problema que supone la enseñanza de las matemáticas, es decir, la desmotivación por parte del alumnado hacia esta materia.

3. METODOLOGÍA

Con el objetivo de mejorar la actitud del alumnado hacia el aprendizaje de la geometría, se diseña, implementa y evalúa una intervención didáctica basada en el uso de recursos lúdicos que permite, a su vez, desarrollar en el alumnado una serie de objetivos de aprendizaje tanto generales de la Educación Primaria como específicos de las matemáticas, entre los que destacan: reconocer figuras planas en objetos cotidianos o en la naturaleza y diferenciar figuras planas en función de sus elementos geométricos. Así, esta intervención didáctica se centra en la enseñanza y el aprendizaje de los siguientes contenidos de geometría: elementos y clasificación de distintos polígonos, similitudes y diferencias de los elementos notables de las figuras planas, lados, vértices y diagonales, clasificación de triángulos y cuadriláteros según sus lados, trazado de polígonos, y perímetro y área de un polígono.

El diseño y desarrollo de esta intervención didáctica tomó como referente los conocimientos previos del alumnado, favoreciendo así su andamiaje y construcción, el desarrollo de la competencia matemática, la motivación del alumnado y la reducción de posibles dificultades. Para asegurar que los contenidos relativos al curso anterior habían sido trabajados y con el objetivo de prevenir dificultades de aprendizaje, se mantuvo una reunión con la tutora del grupo. Tras la reunión se concluye que tales contenidos fueron: reconocimiento de polígonos e identificación de sus lados y vértices. Por lo tanto, esta intervención didáctica va dirigida al refuerzo de estos conocimientos, así como a la enseñanza y el aprendizaje de otros contenidos nuevos, mencionados con anterioridad.

3.1. PARTICIPANTES

La intervención didáctica que se describe se implementó con un grupo de 10 alumnos (6 niños y 4 niñas) de tercer curso de Educación Primaria (8-9 años) de un centro público, entre los que se encuentra una alumna con Trastorno del Espectro Autista (TEA), para la cual se plantearon una serie de adaptaciones en aquellos recursos lúdicos en los que las especialistas de Pedagogía Terapéutica (PT) y de Audición y Lenguaje (AL) lo consideraron necesario, haciendo posible su participación en todas las sesiones.

3.2. Temporalización

Los recursos lúdicos diseñados se implementaron en tres sesiones de matemáticas, durando un total de 60 minutos cada sesión. Los recursos lúdicos empleados en las primeras sesiones (denominados *Concepto tabú*, *Geomemotry*, *¿Quién es figura?*, y *Sopa de figuras*) iban referidos a la asimilación de los diferentes conceptos necesarios para emplear el recurso lúdico final (denominado *Maths party*), es decir, los primeros permitieron andamiar los conocimientos requeridos para el último. Todos los recursos lúdicos fueron diseñados para ser empleados en gran grupo o en parejas, a excepción del último, para el cual se dividió al grupo-clase, de forma aleatoria, en subgrupos de 3 o 4 miembros.

3.3. Descripción de los recursos lúdicos

En este apartado, se presenta la descripción de los cinco recursos lúdicos diseñados e implementados. Los materiales necesarios para su desarrollo (a excepción de Shapes puzzle®) han sido elaborados por la primera autora de este trabajo, tomando como referencia los juegos tradicionales a los que estos recursos lúdicos se asemejan.

3.3.1. Concepto tabú

El objetivo de este recurso lúdico es que el alumnado aprenda a referirse a las figuras planas de diferentes formas, mejorando así su capacidad para describir un elemento geométrico sin necesidad de recurrir a una definición concreta, así como la capacidad para asociar unas características determinadas a un objeto geométrico. En relación con la competencia matemática, este juego permite formular conceptos matemáticos utilizados para describir características geométricas de los objetos que nos rodean. Para su implementación se necesitan: 13 tarjetas, en cada una de las cuales aparece en mayúsculas la palabra a adivinar, acompañada de dos o tres palabras que no se pueden utilizar durante la descripción (figura 3) y un temporizador de arena de 60 segundos.

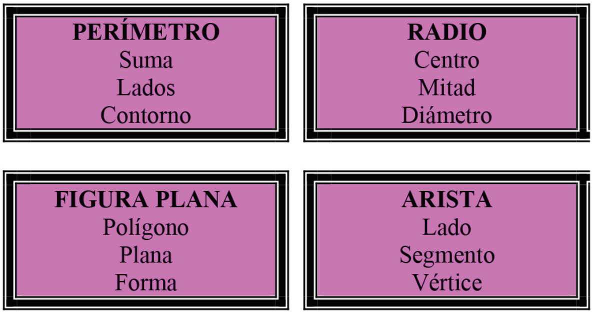


Figura 3. Tarjetas del *Concepto tabú*. Fuente: elaboración propia.

La dinámica se realiza por equipos, para lo cual se divide al grupo-clase en dos, y consiste en que un miembro de uno de los dos equipos describe oralmente una figura que su grupo debe adivinar en un máximo de dos intentos, en menos de 60 segundos. En caso de acierto, el equipo suma un punto, en caso de fallo existe la posibilidad de rebote, es decir, el equipo contrario puede contestar, en caso de acierto suma un punto y en caso de fallo se vuelve a poner la tarjeta con el resto. Gana el equipo que al final tenga más puntuación.

En el caso de la alumna con TEA, la adaptación consiste en invertir el procedimiento: cuando a la alumna le toque describir una palabra para que su equipo la adivine, ella tiene una tarjeta en la cual aparece una definición completa que debe leer. A continuación, tres de sus compañeros le presentan tres opciones entre las que debe elegir cuál es la opción correcta. En caso de acierto, su equipo suma un punto, pero en caso de error no hay rebote.

3.3.2. Geomemotry

El objetivo principal de este recurso lúdico es mejorar la capacidad memorística del alumnado, así como el reconocimiento de las diferentes figuras planas que se van a mostrar. En relación con la competencia matemática, este juego permite reconocer propiedades de diferentes elementos geométricos que sirven para explicar distintos fenómenos e identificar objetos de una variedad de contextos que cumplan tales propiedades. Para ello se necesita: una pizarra digital, conexión a Internet y unas tarjetas. Para acceder al recurso lúdico se utilizan dos enlaces diferentes: https://bit.ly/3apRu9a y https://bit.ly/3apRu9a. Al entrar en estos enlaces, el alumnado se encuentra con una serie de tarjetas. En el caso del primer recurso lúdico, las tarjetas tienen una imagen de diferentes figuras planas u otros elementos geométricos, mientras que, en el segundo, se combina tanto la presencia de imágenes como de textos (figura 4).

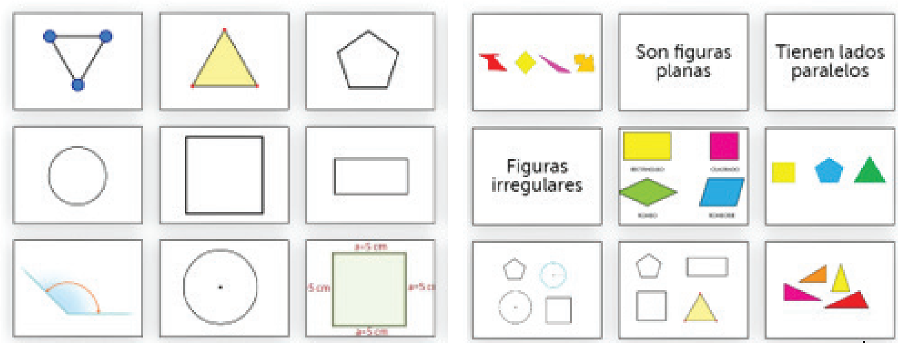


Figura 4. Tarjetas del *Geomemotry*. Fuente: elaboración propia.

En esta dinámica el grupo vuelve a estar dividido en dos equipos. La actividad se organiza en dos partes, para así aumentar la complejidad entre la primera y la segunda, pero el funcionamiento es el mismo. Se proyecta en la pizarra digital una serie de tarjetas boca abajo. Cada miembro del equipo, de uno en uno, debe encontrar parejas de figuras planas. En la primera parte, las parejas a buscar están formadas por pares de figuras planas exactamente iguales, mientras que, en la segunda, se debe emparejar una tarjeta que contenga una ilustración con otra tarjeta que recoja por escrito la característica fundamental de las figuras planas que aparecen en la imagen. Por ejemplo, si en una tarjeta aparecen distintos triángulos, su pareja será la tarjeta que tiene escrito "Triángulos según sus lados". Una vez se ha encontrado una pareja, el alumno debe responder las siguientes preguntas en menos de un minuto: en la primera parte, si es una figura plana, ¿qué figura es?, ¿cuántos lados tiene?, ¿cuántos vértices tiene?, nombra tres objetos que tengan la forma de esa figura plana; si es otro elemento geométrico, ¿qué elemento es?, ¿a qué figura plana puede pertenecer?; en la segunda parte, nombra dos elementos del aula que tengan esta característica. Si estas preguntas se responden correctamente, entonces el equipo del miembro que haya acertado consigue un punto, en caso de error existe la posibilidad de rebote para el otro equipo. El equipo con mayor puntuación gana.

Tras hablar con las especialistas que atienden a la alumna con TEA, se concluyó que no era necesaria una adaptación de este recurso lúdico, dada su alta capacidad de memoria.

3.3.3. ¿Quién es figura?

Este recurso lúdico tiene como objetivo profundizar en el reconocimiento de las figuras planas y sus partes, y de otros elementos geométricos. Así, en relación con la competencia matemática, este juego permite identificar elementos geométricos de una variedad de contextos y reconocer sus propiedades geométricas. La dinámica se desarrolla por parejas y se emplean las tarjetas del *Concepto tabú* (figura 3), que se reparten equitativamente entre ambos. Cada miembro de la pareja elige una figura plana u objeto geométrico de los que aparecen en las tarjetas, que el otro miembro debe adivinar a partir de preguntas a las que solo se puede contestar sí o no. Para poder registrar la puntuación de cada alumno, cuando se adivine la figura plana o el elemento geométrico descrito por el compañero se anota un punto, siendo acumulativos en la pareja, por lo que gana la pareja que, al finalizar el tiempo dedicado a este recuso lúdico, tenga más aciertos.

Como adaptación para la alumna con TEA, se muestran los nombres de diferentes figuras planas, y la alumna tiene que decir el nombre de la figura plana y su número de lados. Además, debe realizar un dibujo de la figura plana y mencionar, como mínimo, un objeto con la misma forma que la figura plana dibujada.

3.3.4. Sopa de figuras

El objetivo de este recurso lúdico es reconocer figuras planas. En relación con la competencia matemática, este juego permite clasificar figuras planas a partir de sus propiedades geométricas e interpretarlas en una variedad de contextos. Los materiales necesarios son: una sopa de figuras planas simple y una compleja (figura 5), colores, y un bolígrafo.

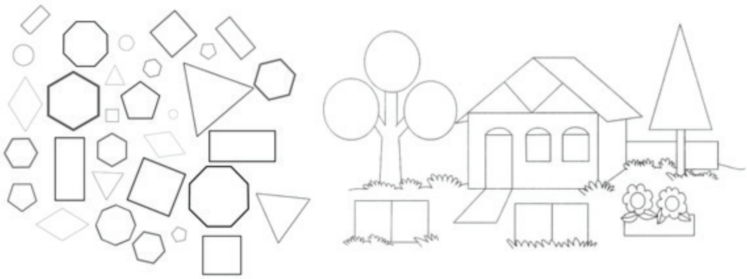


Figura 5. Sopas de figuras planas (simple a la izquierda y compleja a la derecha). Fuente: elaboración propia.

Este recurso lúdico se emplea de forma individual. Consiste en discriminar las diferentes figuras planas que aparecen en las sopas de figuras de cada nivel (figura 5). Por la parte de atrás, el alumnado ha de anotar cuántas hay de cada tipo y clasificarlas según el número de lados, acompañando esta clasificación con un dibujo. Se comienza con una sencilla (Sopa de figuras planas simple), en la cual aparecen figuras planas descontextualizadas, teniendo que colorear o rodear las que pertenezcan al mismo grupo y, a continuación, se muestra un dibujo realizado a base de estas figuras planas (Sopa de figuras planas compleja), en el que hay que colorear, del mismo color, las figuras con la misma forma. Esta es una prueba de velocidad, por lo que el alumno que encuentre antes todas las figuras planas en la sopa de primer nivel obtiene un punto y el que lo haga en la de segundo nivel dos puntos.

La alumna con TEA solo debe trabajar con la Sopa de figuras planas simple y, posteriormente, puede utilizar el juego de fichas que tiene a su disposición, llamado Shapes puzzle® (figura 6), que consiste en utilizar una serie de formas geométricas para construir dibujos dados por unas cartas.

Figura 6. Shapes puzzle®. Fuente: elaboración propia.

3.3.5. Maths party

El objetivo de este recurso lúdico es realizar un repaso de todos los contenidos trabajados, favoreciendo la asimilación de las diferentes figuras planas, así como de los elementos geométricos que las forman. En relación con la competencia matemática, este juego permite formular, emplear e interpretar elementos y propiedades geométricas en una variedad de contextos, para describir, explicar y predecir fenómenos. Los materiales que se necesitan son: un tablero (figura 7), tarjetas de pruebas, un dado grande, y fichas de colores para cada equipo.

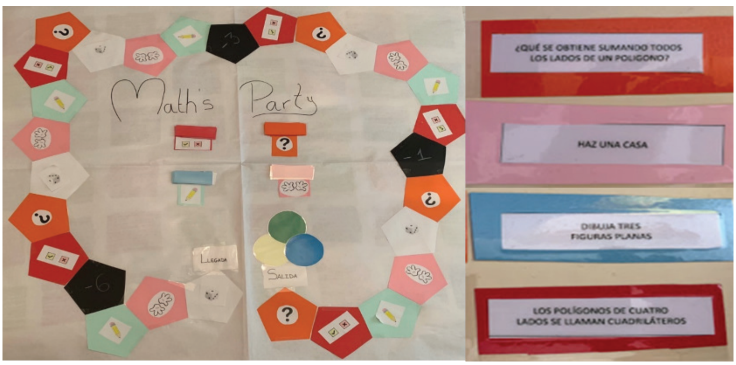


Figura 7. Tablero y tarjetas del *Maths party*. Fuente: elaboración propia.

Para emplear este recurso lúdico se divide al grupo-clase en tres equipos. El alumnado debe responder preguntas tipo verdadero o falso o de respuesta larga, dibujar o hacer mímica, hasta llegar al final del tablero. En el recorrido hay diferentes casillas que indican cuál es la tarjeta central que ha de coger cada miembro del equipo para saber qué prueba debe hacer. Para pasar de una casilla a otra, además de tirar un dado, el equipo debe superar la prueba de manera correcta. En caso de equivocarse, debe esperar de nuevo a que le llegue su turno. El tablero contiene tres casillas negras para añadir tensión al desarrollo. En caso de caer en una de estas casillas, el alumno debe retroceder el número de casillas que se indique. Por último, la casilla en la que se representa un dado permite volver a tirar. Gana el equipo que primero llegue a la casilla *Llegada*.

La alumna con TEA se integra en un equipo para favorecer la socialización con el resto del grupo-clase, intentando adaptar las preguntas a su nivel de conocimientos para que también pueda participar. En caso de que la alumna no quiera participar, se le puede proponer trabajar, de nuevo, con el Shapes puzzle® (figura 6).

3.4. Evaluación de la intervención didáctica

La evaluación es un elemento fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje, no solo para conocer cómo evoluciona el alumnado, sino también para valorar cómo se ha desarrollado la actuación del docente. Para evaluar la intervención didáctica descrita, se emplearon dos instrumentos: un registro de la observación sistemática de la actitud (nivel de implicación e interés) del alumnado durante el empleo de los recursos lúdicos y tres dianas de evaluación (figura 8), una para ser empleada antes y después de implementar los recursos lúdicos para conocer el nivel de motivación inicial y final del alumnado hacia las matemáticas, otra para que el alumnado valore cada uno de los recursos lúdicos que se han empleado y, una tercera para que el alumnado evalúe algunos aspectos metodológicos generales a tener en cuenta por el docente, en caso de volver a implementar esta intervención didáctica. Estas dos últimas dianas de evaluación solo se aplicaron con posterioridad a la intervención didáctica.

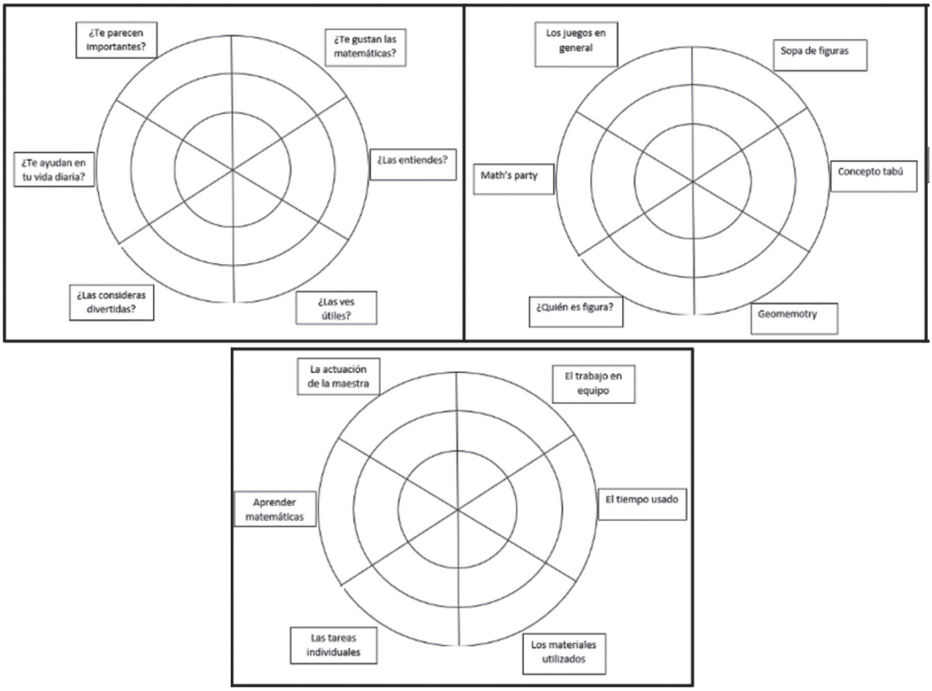


Figura 8. Dianas de evaluación. Fuente: elaboración propia.

En cada una de estas dianas se muestra un círculo dividido en seis sectores iguales, cada uno de los cuales hace referencia a cada aspecto a evaluar. Cada sector está, a su vez, subdividido en tres trapecios circulares. El alumnado debe colorear, para cada aspecto a evaluar, tantos trapecios circulares como considere, entendiendo que colorear los tres trapecios circulares que componen un sector representa una valoración alta, colorear dos trapecios circulares representa una valoración media, colorear un trapecio representa una valoración baja y no colorear ningún trapecio representa una valoración nula. Para el análisis de los datos, cada una de estas valoraciones se traduce en un valor cuantitativo de 3, 2, 1 o 0 puntos, respectivamente.

4. RESULTADOS

Del registro de la observación sistemática se percibe un aumento de la motivación del alumnado hacia el aprendizaje de la geometría en paralelo al desarrollo de la intervención didáctica. Con anterioridad a la implementación de los recursos lúdicos en el aula, eran comunes entre el alumnado los siguientes comentarios al inicio de la sesión de matemáticas: "no quiero dar mates", "qué pereza", "odio tener que dar mates". Sin embargo, una vez inmersos en el uso de recursos lúdicos, sus comentarios cambiaron a: "antes no me gustaban las mates, pero ahora sí", "¿cuándo toca mates?" o "ahora me gusta mucho la clase de matemáticas". Lo anterior se alinea con investigaciones previas que demuestran un impacto significativo del uso de los juegos en la motivación del alumnado hacia el aprendizaje de las matemáticas (Acevedo-Suárez *et al.*, 2022; Divjak y Tomic, 2011; González *et al.*, 2014; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2014; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2021). Además, la intervención didáctica implementada consiguió que un alumno que sufre una baja tolerancia a la frustración, sobre todo en esta rama, se mostrara con ganas de trabajar la materia. En este sentido, González *et al.* (2014) indican que la incorporación de juegos en el proceso de enseñanza-aprendizaje permite reducir la ansiedad del alumnado hacia las matemáticas.

En lo que se refiere a la alumna con TEA, se observó una gran implicación por su parte, mostrándose más participativa de lo habitual y con una motivación mayor, aspecto reflejado en su diana de evaluación. También se percibió un mayor nivel de interacción con sus compañeros, algo destacable puesto que, por lo general, no solía conversar con ellos. Las propias especialistas destacaron lo siguiente durante el empleo del último de los recursos lúdicos: "es increíble lo ilusionada que está, además de que está hablando y cooperando, es un aspecto muy significativo en ella". Lo anterior respalda las ideas de Alsina y Planas (2008) sobre la capacidad de los recursos lúdicos para potenciar la atención a la diversidad en el aula.

El análisis de los datos recogidos por medio de las tres dianas de evaluación confirma los resultados percibidos por medio de la observación sistemática, desde un punto de vista más objetivo. La primera diana de evaluación se entregó con anterioridad y con posterioridad al empleo de los recursos lúdicos para conocer el nivel de motivación inicial y final del alumnado hacia las matemáticas. Comparando los resultados (figura 9), se observa una mejora generalizada en los seis aspectos valorados, es decir, la percepción del alumnado sobre el gusto por las matemáticas, el nivel de comprensión de esta materia, su utilidad en general y en particular en su vida diaria, la consideración de las matemáticas como una materia divertida, así como su importancia son más positivas tras participar en la intervención. Investigaciones previas similares demuestran que estos resultados no son exclusivos del ámbito de la geometría, sino que incluir recursos lúdicos en el aprendizaje de otros contenidos matemáticos en Educación Primaria, como por ejemplo los números, fomenta el gusto del alumnado hacia esta materia (Acevedo-Suárez *et al.*, 2022; Góngora Vega y Cu Balán, 2009; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2021).

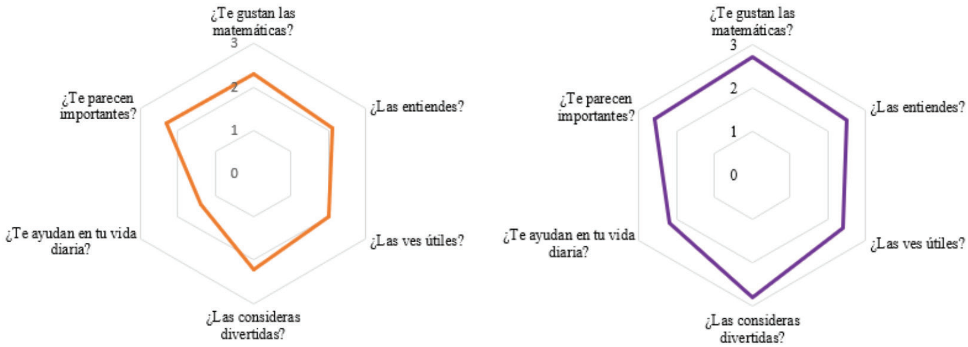


Figura 9. Resultados de las dianas de evaluación para valorar la motivación antes (a la izquierda) y después (a la derecha) de implementar la intervención didáctica. Fuente: elaboración propia.

El cambio más relevante se observa en el ítem "¿Te ayudan (las matemáticas) en tu vida diaria?", tal vez porque el alumnado percibe el uso de recursos lúdicos como un elemento presente en su día a día, así, la metodología empleada refuerza esta conexión, tal y como afirman Divjak y Tomic (2011).

La puntuación del ítem "¿Las entiendes?" también presenta un importante aumento, de lo que se puede concluir que el uso de recursos lúdicos es útil para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, promoviendo a su vez una mayor comprensión de sus contenidos por parte del alumnado. Además, se evidencia que el uso de estos recursos en el aula hace que el alumnado vea las matemáticas como una asignatura más divertida, algo ya señalado por otros autores (González *et al.*, 2014).

La segunda diana de evaluación, a completar por el alumnado, únicamente con posterioridad a la intervención didáctica, pretendía analizar el nivel de satisfacción con cada uno de los recursos lúdicos empleados (figura 10).

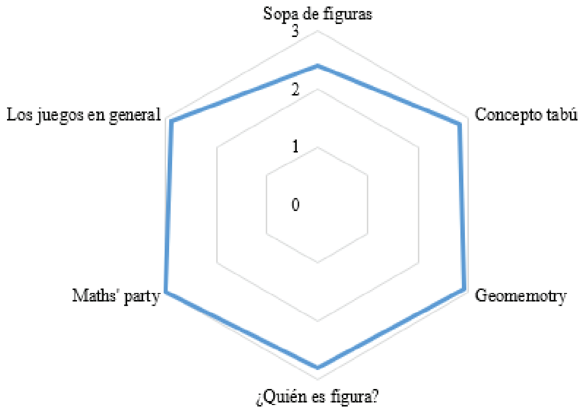


Figura 10. Resultados de la diana de evaluación para valorar los juegos didácticos. Fuente: elaboración propia.

Por lo general, se observan valoraciones muy positivas, siendo el recurso lúdico con mayor puntuación el *Maths party*. La peor puntuación, con una valoración media entre media y alta, se observa en el juego *Sopa de figuras*, quizás debido a que ha sido el único recurso lúdico utilizado de forma individual. Esta conclusión se corrobora con los resultados de la tercera diana de evaluación (figura 11), que pretendía analizar distintos aspectos metodológicos de la intervención didáctica. En ella se observa que el aspecto peor valorado es la realización de tareas individuales. En este sentido, Edo y Deulofeu (2006) defienden que el uso de grupos cooperativos en secuencias didácticas basadas en el empleo de recursos lúdicos favorece el aumento de las actuaciones de ayuda entre el alumnado. También se percibe que el tiempo usado, los materiales utilizados, el aprendizaje de las matemáticas y la actuación de la maestra fueron valorados de una forma muy positiva. En particular, es interesante observar que todo el alumnado otorgó al ítem "Aprender matemáticas" empleando recursos lúdicos la valoración más alta (es decir, coloreando los tres trapecios circulares del correspondiente sector), aspecto que se debe tener especialmente en consideración.

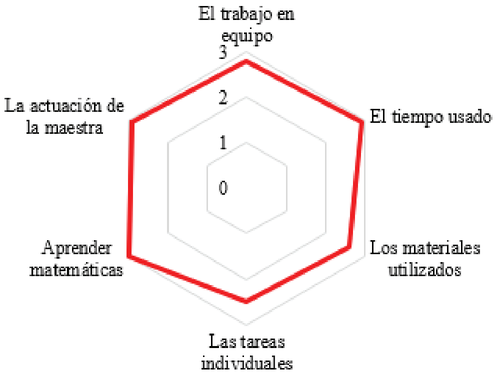


Figura 11. Resultados de la diana de evaluación para valorar la metodología.
Fuente: elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

Las matemáticas siguen siendo una de las materias hacia las que el alumnado sufre una gran desmotivación. Tras el diseño, implementación y evaluación de esta intervención didáctica, se puede afirmar que el uso de recursos lúdicos aumenta tanto la motivación como el interés del alumnado hacia el aprendizaje de la geometría, al menos en el curso y para los contenidos que ha sido implementada. Así, los resultados anteriores avalan los beneficios revelados en estudios de investigación previos (Chamoso *et al.*, 2004; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2014).

Consideramos relevante seguir explorando el potencial de los recursos lúdicos, pero adaptados a otros contenidos, en otros cursos y etapas educativas, incluso en otras materias, para analizar el impacto sobre la motivación del alumnado en otros contextos distintos al que se presenta en esta intervención didáctica. En este sentido, cabe mencionar que una de las bondades de este trabajo es la propuesta de una serie de recursos lúdicos que por su naturaleza son fácilmente adaptables a otros contenidos, de la misma o de otra materia, así como las adaptaciones descritas para alumnado con necesidades educativas especiales. Como futura línea de trabajo, por ser este aspecto una de las limitaciones de la evaluación de esta intervención didáctica, se plantea el análisis del nivel de adquisición de los contenidos trabajados y del logro de los objetivos de aprendizaje. Si bien este no era uno de los objetivos de investigación, pues el foco siempre estuvo en la mejora de la motivación del alumnado hacia las matemáticas, no puede tampoco pasar desapercibido que el empleo de recursos lúdicos no busca solo un fin recreativo, sino educativo (Chacón, 2008). En cualquier caso, los resultados de estudios previos avalan el potencial de los recursos lúdicos, no solo con fines actitudinales, sino también de enseñanza y aprendizaje (Divjak y Tomić, 2011; Edo y Deulofeu, 2006; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2014; Muñiz-Rodríguez *et al.*, 2021), por lo que cabría esperar un efecto igualmente favorable.

REFERENCIAS

Acevedo-Suárez, D., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). Dinámicas lúdicas para el aprendizaje de las matemáticas en Primaria. *SUMA, 102*, 9-18.

Alejandro, M. F. (2013). Estrategias didácticas para un aprendizaje constructivista en la enseñanza de las matemáticas en los niños y niñas de nivel primaria. *Perspectivas Docentes, 52*, 43-58.

Alsina, Á. (2010). La «pirámide de la educación matemática» Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189*, 12-16.

Alsina, Á., y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva: propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea.

Arredondo, G. M., Pérez Rivera, G., y Aguirre, M. E. (2006). *Didáctica general*. Limusa.

Baños, R. (2007). *Los recursos didácticos*. Universidad Pedagógica.

Bautista-Vallejo, J. M., y López, N. R. (2002). El juego didáctico como estrategia de atención a la diversidad. *Ágora Digital, 4*, 1-9.

Bishop, A. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 18*, 9-19.

Brooker, L., y Woodhead, M. (2013). *El derecho al juego*. The Open University.

Chacón, P. (2008). El juego didáctico como estrategia de enseñanza y aprendizaje. ¿Cómo crearlo en el aula? *Nueva Aula Abierta, 16*(5), 1-8.

Chamorro, I. L. (2010). El juego en la educación infantil y primaria. *Autodidacta, 1*(3), 19-37.

Chamoso, J. M., Durán, J., García, J., Martín, J., y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas. *SUMA, 47*, 47-58.

Díaz, J. (2009). *Aplicación de nuevas técnicas y estrategias del aprendizaje cooperativo y significativo en la enseñanza de la matemática: dos alternativas que sustentan la capacitación y/o preparación del joven del siglo XXI en el continuo devenir humano*. El Cid Editor.

Divjak, B., y Tomić, D. (2011). The impact of game-based learning on the achievement of learning goals and motivation for learning mathematics-literature review. *Journal of Information and Organizational Sciences, 35*(1), 15-30.

Edo, M., y Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias, 24*(2), 257-268.

Evans, M. A. (2009). Mobility, Games and Education. En R.E. Ferdig (Ed.), *Handbook of Research on Effective Electronic Gaming in Education* (pp. 96-110). Hershey.

Fernández Palop, P., y Caballero García, P. A. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 20*(1), 201-217.

Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática.* La Muralla.

Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *SUMA, 17*, 10-16.

Gamboa Araya, R., y Moreira Mora, T. E. (2017). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Actualidades Investigativas en Educación, 17*(1), 514-559.

Glasser, W. (1981). *Stations of the mind: New directions for reality therapy.* HarperCollins.

Góngora Vega, L. C., y Cu Balán, G. (2009). Aprender matemáticas, jugando con números y signo. *Quaderns Digitals: Revista de Nuevas Tecnologías y Sociedad, 59*.

Gómez, I. M. (1990). Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. En R. Porlán y P. Cañal (Eds.), *Cambio educativo y desarrollo profesional* (pp. 323-330). Universidad de Sevilla.

González, A. G., Molina, J. G., y Sánchez, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 26*(3), 109-133.

Gros, B. (2008). Juegos digitales y aprendizaje: fronteras y limitaciones. En B. Gros (Ed.), *Videojuegos y aprendizaje* (pp. 9-29). Graó.

de Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores De Matemáticas Isaac Newton (Ed.), *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 49-85). Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton.

Hattie, J. (2009). *Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* Routledge.

Heredia Escorza, Y., y Sánchez Aradillas, A. L. (2020). *Teorías del aprendizaje en el contexto educativo.* Editorial Digital del Tecnológico de Monterrey.

Herrera, N. L., Montenegro, W., y Poveda, S. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica Del Norte, 35*, 254-287.

Herrero, M., Torralba-Burrial, A., y del Moral Pérez, M. E. (2020). Revisión de investigaciones sobre el uso de juegos digitales en la enseñanza de las ciencias de la vida en primaria y secundaria. Enseñanza de las Ciencias, 38, 103-119.

Minerva Torres, C. (2002). El juego: Una estrategia importante. *Educere, 19*, 289-296.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado, 295*, 1-64.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2019a). *PISA 2018. Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes. Informe español.* Secretaría General Técnica.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2019b). *TIMSS 2019. Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias.* Secretaría General Técnica.

Molina, C. R. (2006). Estrategias metodológicas utilizadas por docentes de séptimo año en la enseñanza del análisis de textos literarios. *Revista de Filología y Lingüística de la Universidad de Costa Rica*, *32*(2), 87-106.

del Moral Pérez, M. E., Fernández García, L. C., y Guzmán Duque, A. P. (2016). Proyecto Game to Learn: Aprendizaje basado en juegos para potenciar las inteligencias lógico-matemática, naturalista y lingüística en primaria. Píxel-Bit. *Revista de Medios y Educación, 49*, 173-193.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., y Rodríguez-Muñiz, L J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *UNION, 39*, 19-33.

Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). Análisis de la práctica docente en el ámbito de la educación estadística en Educación Secundaria. *Paradigma, 42*(Extra 1), 191-200.

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Ortiz, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). El juego como recurso didáctico para el refuerzo de contenidos matemáticos y la mejora de la motivación. *Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática, 2*, 1-23.

OCDE (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. PISA, OECD Publishing.

Ordoñez, P. (2006). Estudio exploratorio sobre las prácticas de enseñanza-aprendizaje adecuadas de las/los docentes. Una mirada a partir de las/los estudiantes. *Revista de Investigación, 6*(2), 271-279.

Pérez, R. C. (2005). Elementos básicos para un constructivismo social. *Avances en Psicología Latinoamericana, 23*(1), 43-61.

Piaget, J. (1985). *Seis estudios de Psicología*. Labor.

Sarlé, P. (2011). El juego como espacio cultural, imaginario y didáctico. *Revista Infancias Imágenes, 10*(2), 83-91.

Vargas, N. A. V., Vega, J. A. N., y Morales, F. H. F. (2020). Aprendizaje basado en proyectos mediados por tic para superar dificultades en el aprendizaje de operaciones básicas matemáticas. *Boletín Redipe, 9*(3), 167-180.

Vygotsky, L. S. (1979). The development of higher forms of attention in childhood. *Soviet Psychology, 18*(1), 67-115.

Vygotsky, L. S. (1991). Imagination and creativity in the adolescent. *Soviet Psychology, 29*(1), 73-88.

Zosh, J. M., Hopkins, E. J., Jensen, H., Liu, C., Neale, D., Hirsh-Pasek, K., Solis, S. L., y Whitebread, D. (2017). *El aprendizaje a través del juego: Un resumen de la evidencia*. LEGO.

Autora de correspondencia

LAURA MUÑIZ-RODRÍGUEZ

Dirección: Despacho 5.16b, Facultad de Gegología, Calle Jesús Arias de Velasco, s/n, 33005 Oviedo (Asturias), España.
munizlaura@uniovi.es